

CFM 2025 – Metz, 27 Août 2025

CINÉMATIQUE DES MILIEUX GÉNÉRALISÉS PAR LES REPÈRES MOBILES

Clément ECKER, Boris KOLEV, Rodrigue DESMORAT

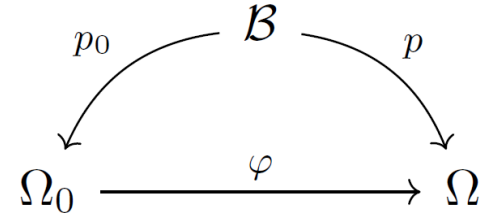
*Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay, CNRS, LMPS - Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay,
91190, Gif-sur-Yvette, France. clement.ecker@ens-paris-saclay.fr*

Qu'est-ce qu'un milieu généralisé ?

■ Mécanique (de Cauchy) non linéaire en grandes déformations [Truesdell et Noll, 1965] :

- Le **body** \mathcal{B} abstrait (labels des particules) ;
- Une **configuration** Ω est l'image du body par un **plongement** p dans l'espace euclidien $(\mathcal{E}, \mathbf{q})$;
- Pour deux configurations Ω_0 (référence) et Ω (déformée) on définit $\varphi: \Omega_0 \rightarrow \Omega$ la **transformation** ;
- Son application linéaire tangente \mathbf{F} est le **gradient de la transformation** ;
- On suppose qu'il existe une **énergie libre** \mathcal{W} avec une densité spécifique ψ du **premier gradient** en φ :

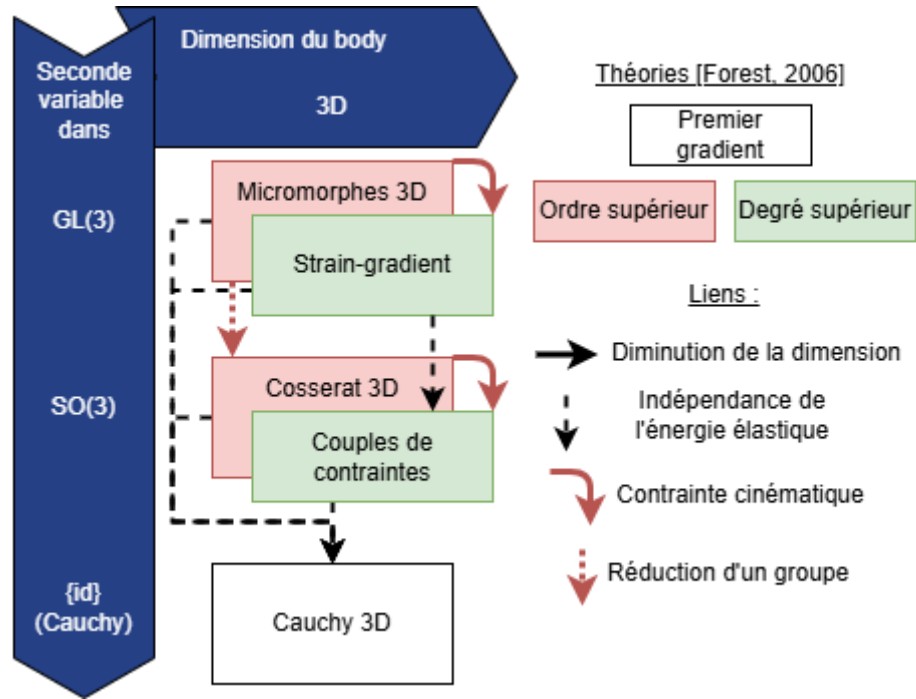
$$\mathcal{W}[\varphi] = \int_{\Omega_0} \rho_0 \psi(\varphi, T\varphi = \mathbf{F}) \text{vol}_{\mathbf{q}}$$



■ Un milieu généralisé a une densité d'énergie libre dépendant d'autres quantités [Forest, 2006a] :

- D'un champ matriciel χ , la **micro-déformation**, et son gradient \rightarrow **Milieux micromorphes** ou milieux d'ordre supérieurs [Eringen, 1999] ;
- Du second gradient de φ , $\nabla \mathbf{F} \rightarrow$ **Milieux du second gradient** ou milieux de degrés supérieurs [Mindlin et Eshel, 1968] ;
- Ses familles regroupent de très nombreux sous modèles (ex : [Cosserat et Cosserat, 1909] $\rightarrow \chi$ est une rotation) ;
- Les milieux du second gradient peuvent être déduit de milieux micromorphes (ex : Strain-gradient $\chi = \mathbf{F}$ alors $\nabla \chi = \nabla \mathbf{F}$).

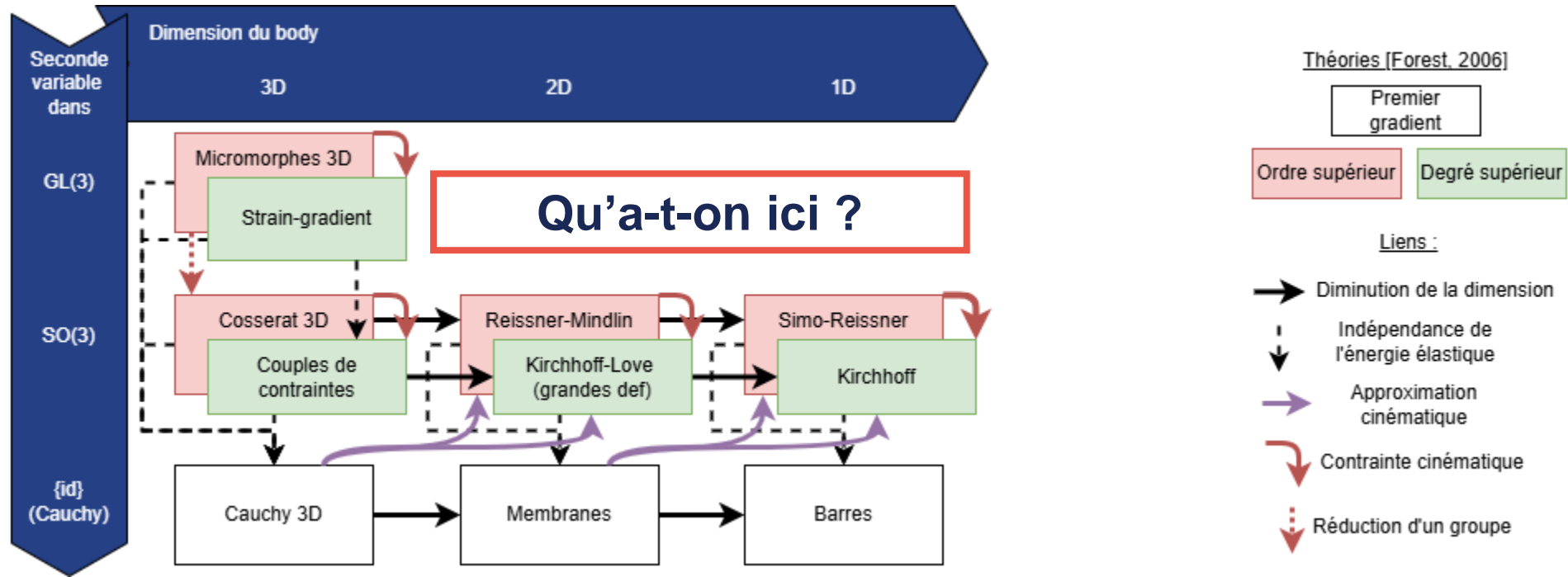
Liens entre les théories 3D



■ Les théories (classiques) des coques et poutres peuvent être vues comme des analogues 2D et 1D des théories de Cosserat et des Couples de contraintes :

- La rotation des sections/fibres sont décrites par un champ supplémentaire ;
- Et si cette rotation suit le champ de transformation de la ligne/surface moyenne alors elle dépend du gradient de cette transformation.

Liens entre les théories 3D, 2D et 1D



Approche systématique par les repères mobiles

■ Approche initiale fondatrice par [Cosserat et Cosserat, 1909] :

- Approche systématique (1D, 2D, 3D) ;
- Géométrie extrinsèque [Darboux, 1889] ;
- Limitée aux repères orthonormés.

■ Théories (classiques) des coques et poutres :

- Peu de liens avec les milieux 3D généralisés mais à nuancer dans les approches récentes [Boyer et Renda, 2017] [Bousselmi, Chaouachi et al, 2019] ;
- Géométrie intrinsèque [Breuneval, 1972] [Simo et Fox, 1989] ;
- Limité aux repères orthonormés mais à nuancer aussi dans les approches récentes [Choi, Kinkel et al, 2024] [Bousselmi, Chaouachi et al, 2019] .

■ Milieux généralisés 3D :

- Parfois étendus aux dimensions plus faible (généralement plaques [Epstein et De Leon, 1998]) ;
- Géométrie intrinsèque [Kröner, 1968] [Yavari et Gorieli, 2012] ;
- Non limité aux repères orthonormés [Eringen, 1999] [Forest et Sievert, 2006b].

■ Notre travail s'inscrit dans la systématisation des approches par repères mobiles en milieu généralisé [Cosserat et Cosserat, 1909], en s'appuyant :

- Sur les outils de la géométrie intrinsèque des repères mobiles [Cartan, 1935] ;
- En ne se limitant pas aux repères orthonormés [Bousselmi, Chaouachi et al, 2019] ;
- Dans le but d'explorer les analogies entres les théories 1D, 2D et 3D.

Sommaire

- **Introduction**
- **Configurations généralisées**
 - Repères mobiles
 - Configurations généralisées
- **Transformation généralisée**
 - Transformation généralisée
 - Définition géométrique de la micro-déformation
- **Classification**
 - Milieux 3D
 - Poutres et Coques
- **Conclusion**

Géométrisation des milieux généralisés

- Théorie du repère mobile [Cartan, 1935]

■ Un **repère ponctuel** R_X en un **point** X de l'espace euclidien \mathcal{E} est soit :

- Une base non-orthonormale (v_i) de l'espace tangent $T_X \mathcal{E}$ en X ;
- Un isomorphisme linéaire de \mathbb{R}^3 dans $T_X \mathcal{E}$;

$$v_1 := R_X \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 := R_X \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 := R_X \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

■ **Fibré des repères** $\mathcal{R}(\mathcal{E})$:

$$\mathcal{R}(\mathcal{E}) := \bigcup_{X \in \mathcal{E}} \{R_X \text{ repère ponctuel en } X \in \mathcal{E}\}$$

■ Un **repère mobile** est une application lisse $R: X \rightarrow R_X$ (section du fibré des repères)

- R^{can} le **repère (mobile) canonique** de $\mathcal{E} \approx \mathbb{R}^3$, $R^{\text{can}}: X \rightarrow (e_1, e_2, e_3)$

■ **Trivialisation du fibré des repères** $\mathcal{R}(\mathcal{E})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathcal{E}) &\rightarrow \mathcal{E} \times \text{GL}_3(\mathbb{R}) \\ R_X &\rightarrow (X, G) \end{aligned}$$

G est la **matrice de changement de base** entre R_X et R^{can}

■ Les transformations inversibles agissent à droite sur les repères :

$$R_X A \rightarrow (X, GA) \quad A \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$$

Configuration généralisées

■ Un **repère mobile** est une application lisse $R: X \rightarrow R_X$

■ Une **configuration généralisée** \mathcal{K} est un **repère mobile** sur la **configuration** Ω (classique) de la **fibre neutre** [Cosserat et Cosserat, 1909]

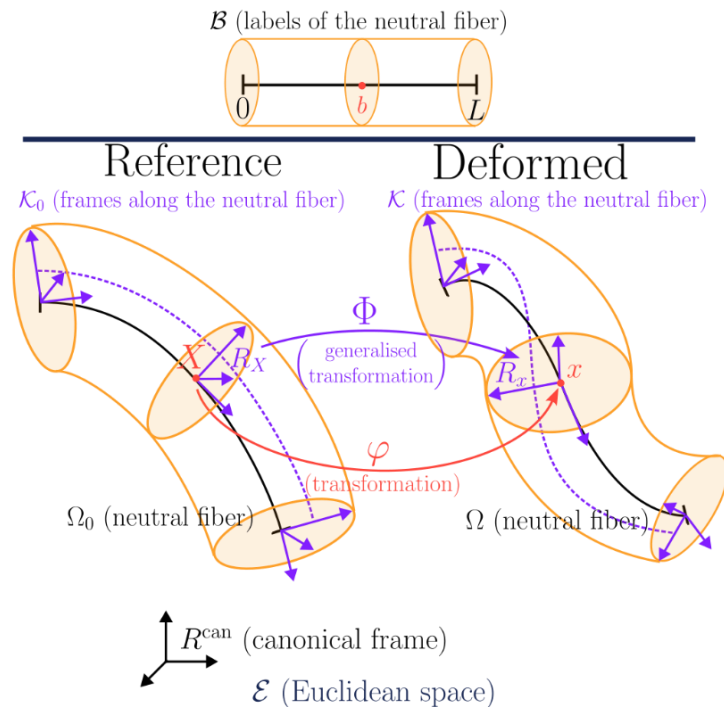
- $\mathcal{B} = [0, L]$ est le **body** (label des particules) ;
- $p: \mathcal{B} \rightarrow \Omega$ est le **plongement (classique)** des **origines des repères** ;
- $P: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{K}$ est le « **plongement** » **généralisé**.

■ Configurations de **référence** :

- Généralisée \mathcal{K}_0 / classique Ω_0

■ Configurations **déformées** :

- Généralisée \mathcal{K} / classique Ω



Transformation généralisée

- Un **repère mobile** est une application lisse $R: X \rightarrow R_X$
- Une **configuration généralisée** \mathcal{K} est un **repère mobile** sur la **configuration** Ω (classique) de la **fibre neutre**

- La **transformation généralisée** Φ :

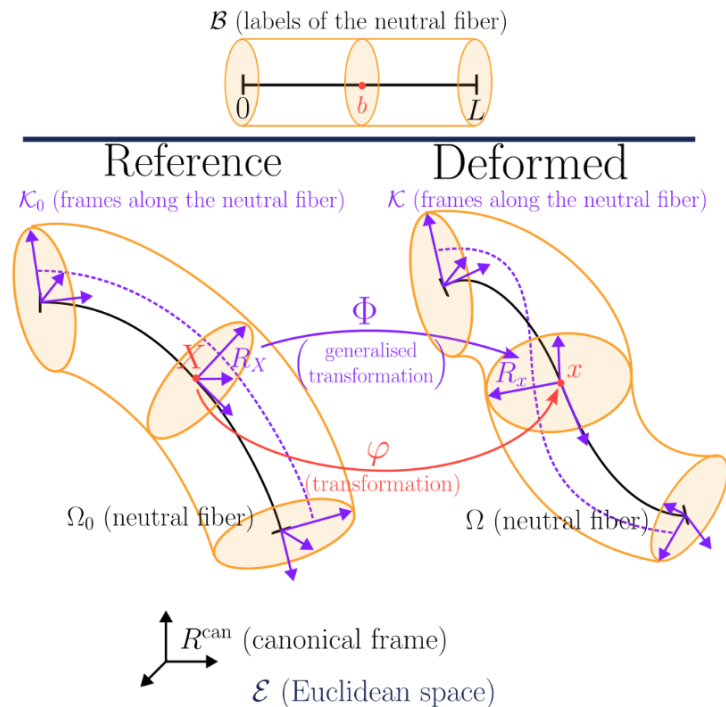
- Envoie les repères de \mathcal{K}_0 sur les repères de \mathcal{K} ;
- L'image de tout repères sur la fibre neutre peut être déduit par :

$$\Phi(R_X \mathbf{A}) = \Phi(R_X) \mathbf{A}, \quad \forall \mathbf{A} \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$$

- Φ contient aussi la **transformation** $\varphi: \Omega_0 \rightarrow \Omega$ de la fibre neutre

- Si R_X est un repère en X de Ω_0 ;
- Alors $\Phi(R_X)$ est un repère en $\varphi(X)$ de Ω .

- Existe et est unique entre deux configurations généralisées.



Transformation généralisée

- Définition géométrique de la micro-déformation

■ La **transformation généralisée** $\Phi: \pi^{-1}(\Omega_0) \rightarrow \pi^{-1}(\Omega)$

$$\pi(R_X) = X$$

■ La **transformation généralisée** induit une **transformation entre les espaces tangents** des configurations classiques **différente** de $\mathbf{F} = T\varphi$

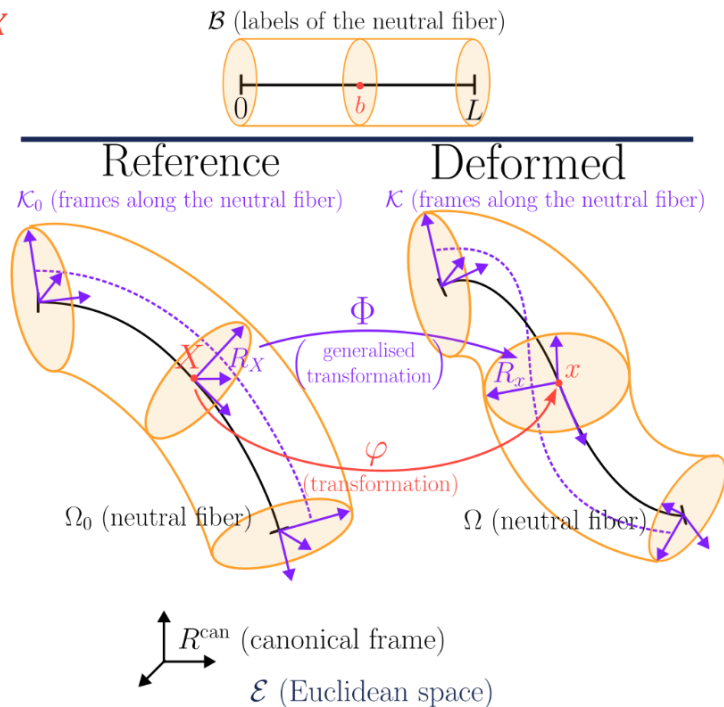
■ La **micro-déformation** $\chi_X: T_X \mathcal{E} \rightarrow T_{\varphi(X)} \mathcal{E}$ [Eringen, 1999] :

Pour R_X un repère en $X \in \Omega_0$:

$$\chi_X := \Phi(R_X) R_X^{-1}$$

■ χ_X ne depend que de X car : $\forall \mathbf{A} \in GL_3(\mathbb{R})$

$$\chi_X := \Phi(R_X) R_X^{-1} = \Phi(R_X \mathbf{A}) (R_X \mathbf{A})^{-1}$$



Transformation généralisée

- Représentation matricielle de la micro-déformation

- La **micro-déformation** $\chi_X: T_X \mathcal{E} \rightarrow T_{\varphi(X)} \mathcal{E}$

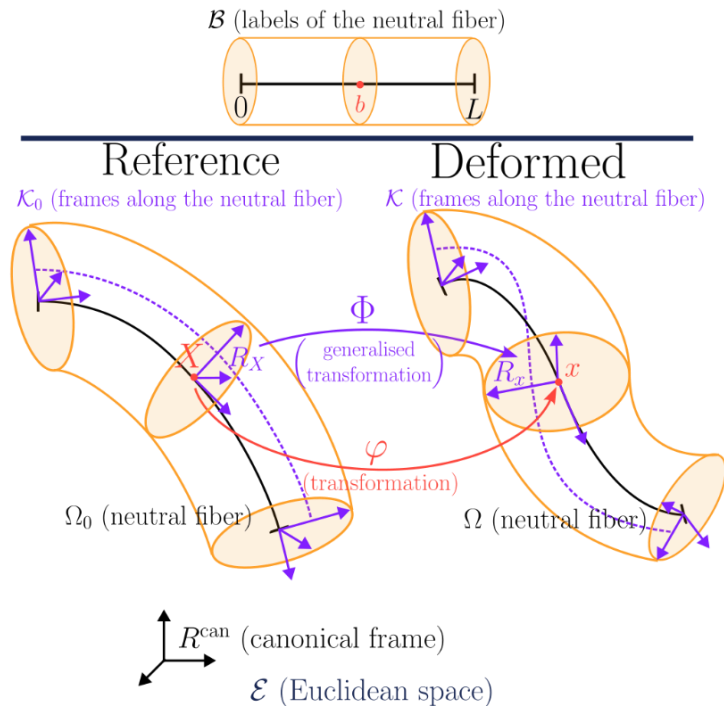
- Sa **représentation matricielle** $[\chi_X]$ dans le repère R^{can} :

$$[\chi_X] = R^{\text{can}}(x)^{-1} \chi_X R^{\text{can}}(X)$$

- S'identifie à la **transformation généralisée** Φ dans la trivialisation :

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{E} \times \text{GL}_3(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{E} \times \text{GL}_3(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} X \\ G \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} x = \varphi(X) \\ g = [\chi_X]G \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $[\chi_X]$ et χ_X sont en général confondus.



Classification des milieux généralisés

- Milieux 3D micromorphes

■ La **micro-déformation** $\chi_X: T_X \mathcal{E} \rightarrow T_{\varphi(X)} \mathcal{E}$;

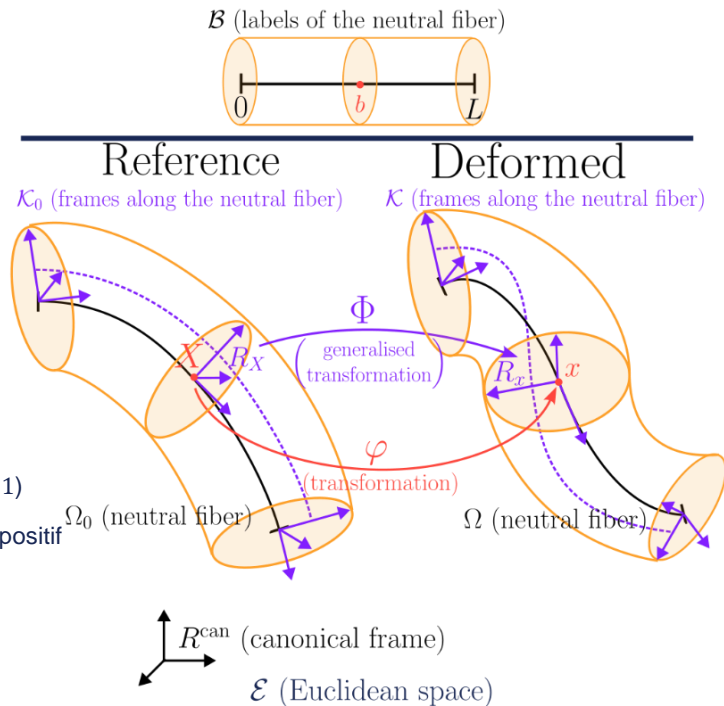
■ Pour H un sous groupe fermé de $GL_3(\mathbb{R})$:

- S'il existe un **ensemble de repères** sur lequel toute paire de repères mobiles est reliée par une unique **fonction de transition** lisse à valeurs dans H ;
- Alors on peut limiter les **configurations généralisées** à ces repères et $[x_X] \in H$;
- Possible si H vérifie une certaine condition [Kobayashi, 1995].

■ La **réduction du groupe structural** donne une famille de théories micromorphes :

Milieu micromorphe	Groupe H
Micromorphe [Eringen, 1999]	$GL_3(\mathbb{R})$
Micromorphe Incompressible	$SL_3(\mathbb{R})$
"Micro-strain" [Forest et Sievert, 2006b]	$\text{Diag}_3(\mathbb{R}_+^*)$
"Micro-stretch" [Eringen, 1999]	$CO(3)$
Cosserat [Cosserat et Cosserat, 1909]	$SO(3)$
Micro-dilatations [Cowin, 1985]	\mathbb{R}_+^*
Cauchy	$\{\text{id}_{GL_3(\mathbb{R})}\}$

- $SL_3(\mathbb{R})$ = Spécial Linéaire ($\det = 1$)
- $\text{Diag}_3(\mathbb{R}_+^*)$ = Diagonal 3x3 défini positif
- $CO(3) \approx \mathbb{R}_+^* \times SO(3)$ = Conforme



Classification des milieux généralisés

- Milieux 3D du second gradient

■ La **micro-déformation** $\chi_X: T_X \mathcal{E} \rightarrow T_{\varphi(X)} \mathcal{E}$;

■ Par **contraintes cinématiques** entre χ_X et \mathbf{F} (**gradient de la transformation**) :

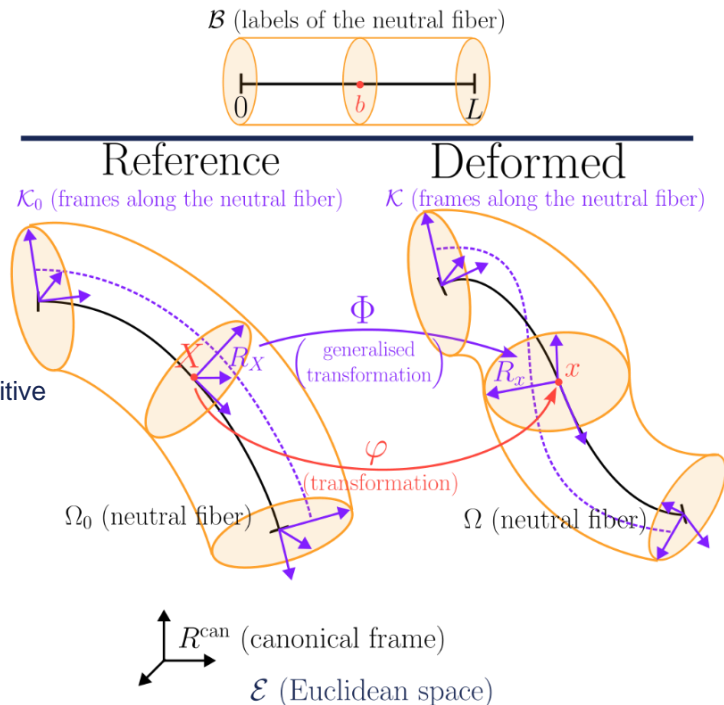
- $\chi_X = \mathbf{F}$ donne la théorie du « Strain-gradient ».

■ On obtient d'autres théories avec la **réduction du groupe structural** et la **décomposition polaire** (RU)

- Entre $[\chi_X]$ et la représentation matricielle de \mathbf{F} ;

$$\begin{aligned} \mathbf{O}(3) \times \mathbf{S}_3^+(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbf{GL}_3(\mathbb{R}) \\ (\mathbf{R}, \mathbf{U}) &\mapsto \mathbf{RU} \quad \mathbf{S}_3^+(\mathbb{R}) = \text{Symétrique définie positive} \end{aligned}$$

Milieu micromorphe	Groupe H	Milieu du second gradient contraint
Micromorphe [Eringen, 1999]	$\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$	"Strain-gradient" [Mindlin et Eshel, 1968]
Micromorphe Incompressible	$\mathbf{SL}_3(\mathbb{R})$?
"Micro-strain" [Forest et Sievert, 2006b]	$\text{Diag}_3(\mathbb{R}_+^*)$	"Stretch-gradient" [Auffray, 2013]
"Micro-stretch" [Eringen, 1999]	$\mathbf{CO}(3)$?
Cosserat [Cosserat et Cosserat, 1909]	$\mathbf{SO}(3)$	Couples de contraintes [Toupin, 1962]
Micro-dilatations [Cowin, 1985]	\mathbb{R}_+^*	"Dilatation gradient" [Auffray, 2013]
Cauchy	$\{\text{id}_{\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})}\}$	-



Classification des milieux généralisés

- Poutres

■ La **micro-déformation** $\chi_X: T_X \mathcal{E} \rightarrow T_{\varphi(X)} \mathcal{E}$;

■ Une **configuration 3D** $\tilde{\Omega}$ d'une **poutre** est donnée par :

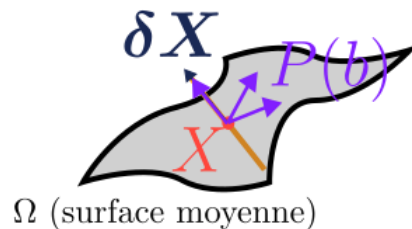
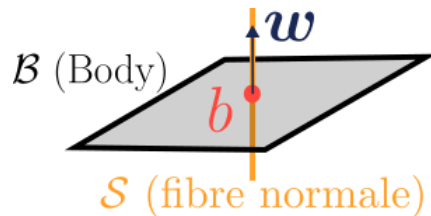
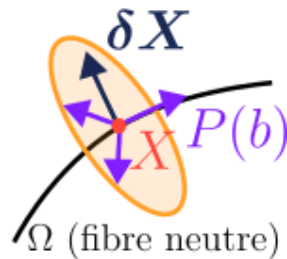
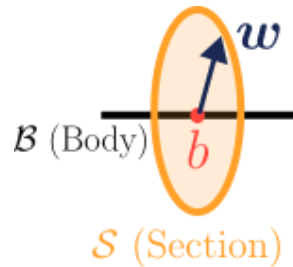
$$\begin{aligned} \mathcal{B} \times \mathcal{S} &\rightarrow \tilde{\Omega} \subset \mathcal{E} \\ (b, w) &\rightarrow p(b) + P(b) \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} = X + \delta X \end{aligned}$$

- La **section de la poutre** \mathcal{S} (dans \mathbb{R}^2) ;
- P, p les « plongements » **généralisé** et **classique** ;
- $P(b) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ doit être tangent à la fibre neutre Ω .

■ La **transformation 3D** $\tilde{\varphi}$ s'exprime alors :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}: \quad \tilde{\Omega}_0 &\rightarrow \tilde{\Omega} \\ X + \delta X &\rightarrow \varphi(X) + \chi_X \delta X \end{aligned}$$

- δX est l'**unique vecteur** positionnant un point de l'espace relativement au barycentre de la section en $X = p_0(b)$.



Classification des milieux généralisés

- Poutres et Coques

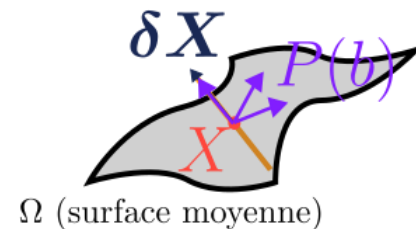
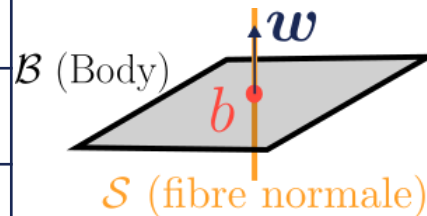
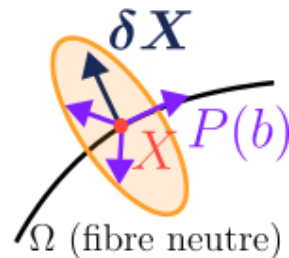
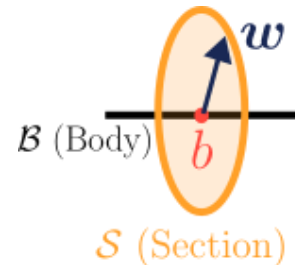
■ La **micro-déformation** $\chi_X: T_X \mathcal{E} \rightarrow T_{\varphi(X)} \mathcal{E}$;

■ Une **configuration 3D** $\tilde{\Omega}$ donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \times \mathcal{S} &\rightarrow \tilde{\Omega} \subset \mathcal{E} \\ (b, w) &\rightarrow p(b) + P(b)(\tilde{w}) = X + \delta X \end{aligned}$$

■ En utilisant les résultats de **réduction structurale** et de **contraintes cinématique** on obtient les théories suivantes :

Milieu 3D	Coque	Poutre	Hypothèses physiques sur les sections
Micromorphe [Eringen, 1999]	?	[Choi, Kinkel et al, 2024]	Uniformément déformées et rotation libre
Micromorphe incompressible	?	Macroshear beam [Bousselmi, Chaouachi et al, 2019]	Uniformément déformées à volume constant et rotation libre
"Micro-stretch" [Eringen, 1999]	?	Macro dilatation beam [Bousselmi, Chaouachi et al, 2019]	Dilatation isotrope et rotation libre
Cosserat	Reissner-Mindlin	Simo-Reissner	Rigides et rotation libre
Couples de contraintes	Kirchhoff-Love	Kirchhoff	Rigides et orthogonale à la fibre neutre
Cauchy	Membranes	Barres	Rigides et sans rotations



Conclusion

- Nous proposons une définition rigoureuse des **configurations généralisés** d'un milieu généralisé :
 - Par un « **plongement** » **généralisé** P : un **repère mobile** le long d'un plongement p du body \mathcal{B} dans \mathcal{E} ;
 - Par la **transformation généralisé** $\Phi: \pi^{-1}(\Omega_0) \rightarrow \pi^{-1}(\Omega)$;
 - Par la définition géométrique de la **micro-déformation** $\chi_X: T_X \mathcal{E} \rightarrow T_{\varphi(X)} \mathcal{E}$;

➡ Cette définition donne les **cinématiques enrichies** des **coques et poutres**.
- Nous proposons une **classification unifiée** de la cinématiques des milieux généralisée en **toute dimension** :
 - Basé sur le groupe de transformation des repères mobiles (*réduction du groupe structural*) ;
 - Les milieux du **second gradient** sont obtenus par contrainte cinématique entre χ et \mathbf{F} .

Conclusion

Milieu 3D	Groupe H	Milieu du second gradient ?	Coques	Poutres	Hypothèses physiques sur les sections
Micromorphe [Eringen, 1999]	$GL_3(\mathbb{R})$	-	?	[Choi, Kinkel et al., 2024]	Uniformément déformées et rotation libre
“Strain-gradient” [Mindlin et Eshel, 1968]	$GL_3(\mathbb{R})$	OUI	?	?	Déformation induite par allongement et courbure de la fibre neutre et orthogonale à la fibre neutre
Micromorphe Incompressible	$SL_3(\mathbb{R})$	-	?	[Bousselmi, Chaouachi et al., 2019]	Uniformément déformées à volume constant et rotation libre
“Micro-strain” [Forest et Sievert, 2006b]	$\text{Diag}_3(\mathbb{R}_+^*)$	-	?	?	Uniformément déformées et sans rotations
“Stretch-gradient” [Auffray, 2013]	$\text{Diag}_3(\mathbb{R}_+^*)$	OUI	?	?	Déformation induite par allongement et courbure de la fibre neutre et sans rotations
“Micro-stretch” [Eringen, 1999]	$CO(3)$	-	?	[Bousselmi, Chaouachi et al., 2019]	Dilatation isotrope et rotation libre
Cosserat [Cosserat et Cosserat, 1909]	$SO(3)$	-	Reissner-Mindlin	Simo-Reissner	Rigides et rotation libre
Couples de contraintes [Toupin, 1962]	$SO(3)$	OUI	Kirchhoff-Love	Kirchhoff	Rigides et orthogonale à la fibre neutre
Micro-dilatations [Cowin, 1985]	\mathbb{R}_+^*	-	?	?	Dilatation isotrope et sans rotations
“Dilatation gradient” [Auffray, 2013]	\mathbb{R}_+^*	OUI	?	?	Dilatation isotrope induite par allongement de la fibre neutre et sans rotations
Cauchy	$\{\text{id}_{GL_3(\mathbb{R})}\}$	-	Membranes	Barres	Rigides et sans rotations

Références

- [Truesdell et Noll, 1965] : Truesdell and Noll, *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, Springer
- [Forest, 2006a] : Forest, *Milieux continus généralisés et matériaux hétérogènes*, Mines de Paris
- [Eringen, 1999] : Eringen, *Microcontinuum Field Theories*, Springer
- [Mindlin et Eshel, 1968] : Mindlin and Eshel, *On first strain-gradient theories in linear elasticity*, International Journal of Solids and Structures
- [Boyer et Renda, 2017] : Boyer and Renda, *Poincaré's Equations for Cosserat Media: Application to Shells*, Journal of Nonlinear Science
- [Kröner, 1968] : Kröner, *Mechanics of Generalized Continua : [...]*, IUTAM Symposium
- [Cosserat et Cosserat, 1909] : Cosserat et Cosserat, *Théorie des corps déformables*, A. Hermann et fils
- [Darboux, 1889] : Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces [...]*, Gauthier-Villars et Fils
- [Breuneval, 1972] : Breuneval, *Géométrie des déformations des surfaces et équations de la mécanique des coques*, Université de Provence
- [Simo et Fox, 1989] : Simo et Fox, *On a stress resultant geometrically exact shell model*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering
- [Epstein et De León, 1998] : Epstein and De León, *On uniformity of shells*, International Journal of Solids and Structures
- [Yavari et Gorieli, 2012] : Yavari and Gorieli, *Riemann–Cartan Geometry of Nonlinear Dislocation Mechanics*, Archive for Rational Mechanics and Analysis
- [Cartan, 1935] : Cartan, *La méthode du repère mobile*, Actualités scientifiques et industrielles
- [Kobayashi, 1995] : Kobayashi, *Transformation Groups in Differential Geometry*, Springer
- [Forest et Sievert, 2006b] : Forest and Sievert, *Nonlinear microstrain theories*, International Journal of Solids and Structures
- [Toupin, 1962] : Toupin, *Elastic materials with couple-stresses*, Archive for Rational Mechanics and Analysis
- [Cowin, 1985] : Cowin, *The viscoelastic behavior of linear elastic materials with voids*, Journal of Elasticity
- [Auffray, 2013] : Auffray, *Geometrical Picture of Third-Order Tensors*, in *Generalized Continua as Models for Materials* (Altenbach 2013, Springer)
- [Choi, Kinkel et al, 2024] : Choi, Kinkel and al, *An objective [...] nonlinear elastodynamic beams with incompatible warping strains*, Multibody System Dynamics
- [Bousselmi, Chaouachi et al, 2019] : Bousselmi, Chaouachi and al, *Construction of new enriched beam models [...]*, International Journal of Mechanical Sciences