

CFM 2025 – Metz, 27 Août 2025

# CINÉMATIQUE DES MILIEUX GÉNÉRALISÉS PAR LES REPÈRES MOBILES

**Clément ECKER, Boris KOLEV, Rodrigue DESMORAT**

Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay, CNRS, LMPS - Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay,  
91190, Gif-sur-Yvette, France. [clement.ecker@ens-paris-saclay.fr](mailto:clement.ecker@ens-paris-saclay.fr)

# Qu'est-ce qu'un milieu généralisé ?

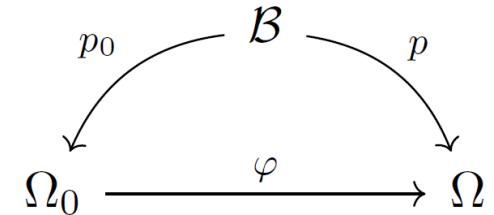
## ■ Mécanique (de Cauchy) non linéaire en grandes déformations [Truesdell et Noll, 1965] :

- Le **body**  $\mathcal{B}$  abstrait (labels des particules) ;
- Une **configuration**  $\Omega$  est l'image du body par un **plongement**  $p$  dans l'espace euclidien  $(\mathcal{E}, \mathbf{q})$  ;
- Pour deux configurations  $\Omega_0$  (référence) et  $\Omega$  (déformée) on définit  $\varphi: \Omega_0 \rightarrow \Omega$  la **transformation** ;
- Son application linéaire tangente  $\mathbf{F}$  est le **gradient de la transformation** ;
- On suppose qu'il existe une **énergie libre**  $\mathcal{W}$  avec une densité spécifique  $\psi$  du **premier gradient** en  $\varphi$  :

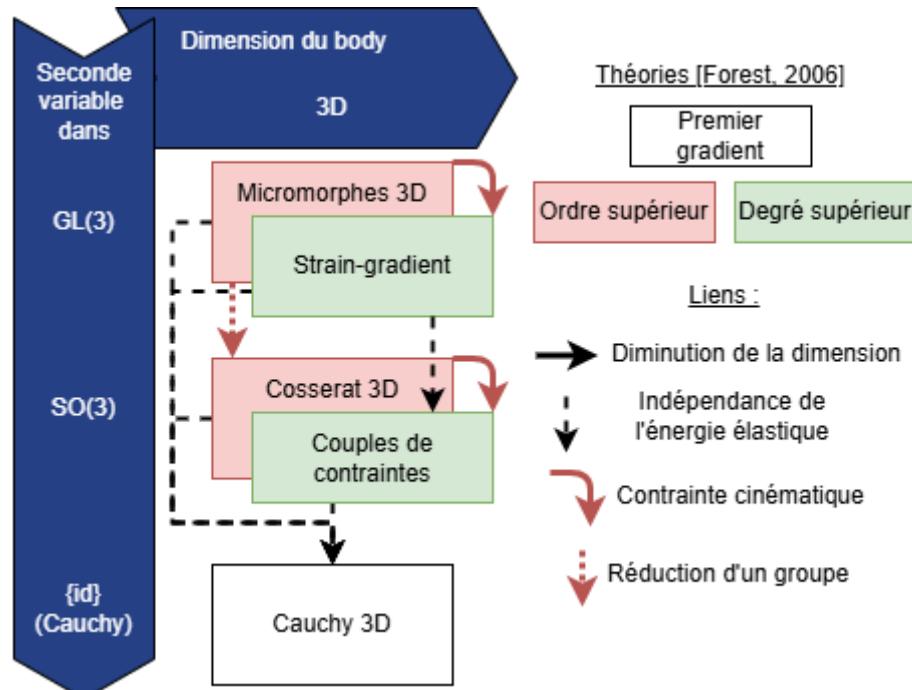
$$\mathcal{W}[\varphi] = \int_{\Omega_0} \rho_0 \psi(\varphi, T\varphi = \mathbf{F}) \text{vol}_{\mathbf{q}}$$

## ■ Un **milieu généralisé** a une densité d'énergie libre dépendant d'autres quantités [Forest, 2006a] :

- D'un champ matriciel  $\mathbf{x}$ , la **micro-déformation**, et son gradient  $\nabla \mathbf{x}$  → **Milieux micromorphes** ou milieux d'ordre supérieurs [Eringen, 1999] ;
- Du second gradient de  $\varphi$ ,  $\nabla^2 \varphi$  → **Milieux du second gradient** ou milieux de degrés supérieurs [Mindlin et Eshel, 1968] ;
- Ses familles regroupent de très nombreux sous modèles (ex : [Cosserat et Cosserat, 1909] →  $\mathbf{x}$  est une rotation) ;
- Les milieux du second gradient peuvent être déduits de milieux micromorphes (ex : Strain-gradient  $\mathbf{x} = \mathbf{F}$  alors  $\nabla \mathbf{x} = \nabla \mathbf{F}$ ).



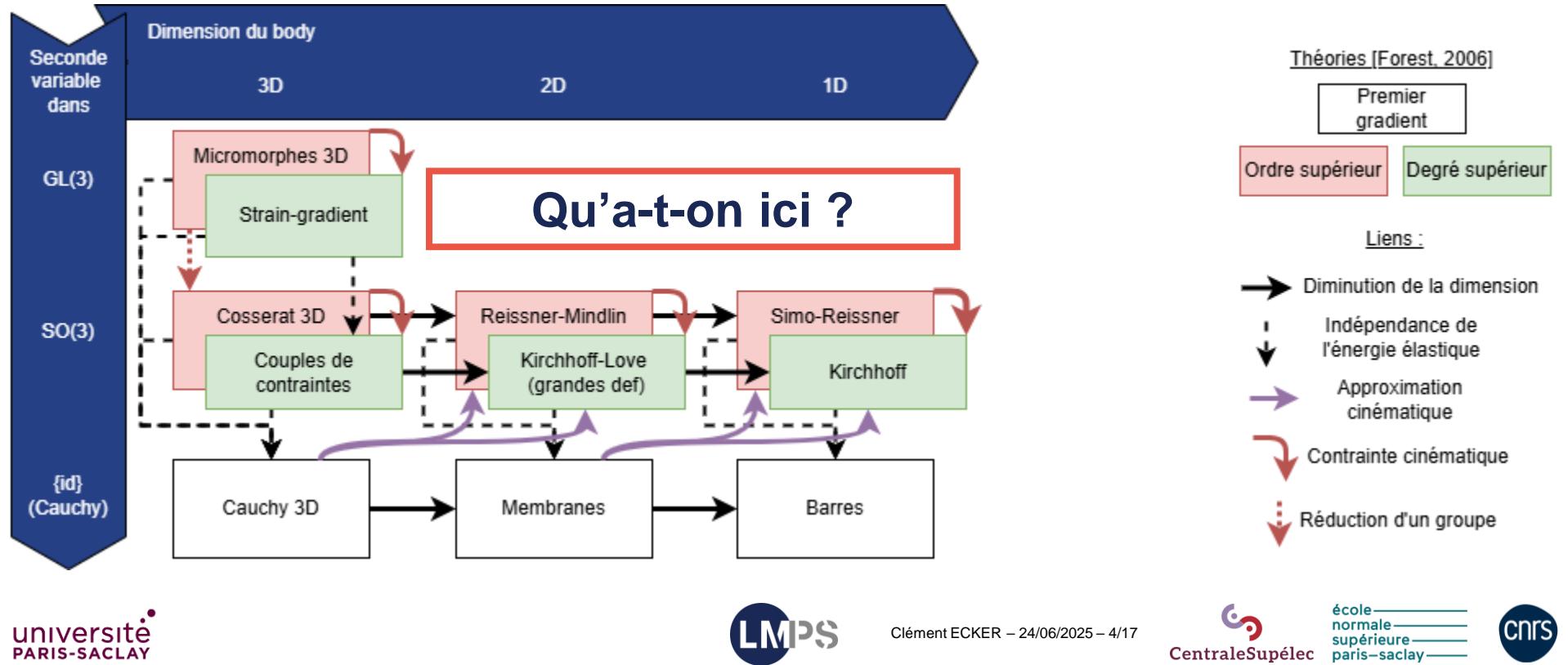
# Liens entre les théories 3D



- Les théories (classiques) des coques et poutres peuvent être vus comme des analogues 2D et 1D des théories de Cosserat et des Couples de contraintes :

- La rotation des sections/fibres sont décrites par un champ supplémentaire ;
- Et si cette rotation suit le champ de transformation de la ligne/surface moyenne alors elle dépend du gradient de cette transformation.

# Liens entre les théories 3D, 2D et 1D



# Approche systématique par les repères mobiles

## ■ Approche initiale fondatrice par [Cosserat et Cosserat, 1909] :

- Approche systématique (1D, 2D, 3D) ;
- Géométrie extrinsèque [Darboux, 1889] ;
- Limitée aux repères orthonormés.

## ■ Théories (classiques) des coques et poutres :

- Peu de liens avec les milieux 3D généralisés mais à nuancer dans les approches récentes [Boyer et Renda, 2017] [Bousselmi, Chaouachi et all, 2019] ;
- Géométrie intrinsèque [Breuneval, 1972] [Simo et Fox, 1989] ;
- Limité aux repères orthonormés mais à nuancer aussi dans les approches récentes [Choi, Kinkel et all, 2024] [Bousselmi, Chaouachi et all, 2019] .

## ■ Milieux généralisés 3D :

- Parfois étendus aux dimensions plus faible (généralement plaques [Epstein et De Leon, 1998]) ;
- Géométrie intrinsèque [Kröner, 1968] [Yavari et Gorieli, 2012] ;
- Non limité aux repères orthonormés [Eringen, 1999] [Forest et Sievert, 2006b].

## ■ Notre travail s'inscrit dans la systématisation des approches par repères mobiles en milieu généralisé [Cosserat et Cosserat, 1909], en s'appuyant :

- Sur les outils de la géométrie intrinsèque des repères mobiles [Cartan, 1935] ;
- En ne se limitant pas aux repères orthonormés [Bousselmi, Chaouachi et all, 2019] ;
- **Dans le but d'explorer les analogies entre les théories 1D, 2D et 3D.**

# Sommaire

- **Introduction**
- **Configurations généralisées**
  - Repères mobiles
  - Configurations généralisées
- **Transformation généralisée**
  - Transformation généralisée
  - Définition géométrique de la micro-déformation
- **Classification**
  - Milieux 3D
  - Poutres et Coques
- **Conclusion**

# Géométrisation des milieux généralisés

## - Théorie du repère mobile [Cartan, 1935]

- Un **repère ponctuel**  $R_X$  en un **point**  $X$  de l'espace euclidien  $\mathcal{E}$  est soit :

- Une base non-orthonormale ( $v_i$ ) de l'espace tangent  $T_X \mathcal{E}$  en  $X$  ;
- Un isomorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $T_X \mathcal{E}$  ;

$$v_1 := R_X \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 := R_X \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 := R_X \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **Fibré des repères**  $\mathcal{R}(\mathcal{E})$  :

$$\mathcal{R}(\mathcal{E}) := \bigcup_{X \in \mathcal{E}} \{R_X \text{ repère ponctuel en } X \in \mathcal{E}\}$$

- Un **repère mobile** est une application lisse  $R: X \rightarrow R_X$  (section du fibré des repères)

- $R^{\text{can}}$  le **repère (mobile) canonique** de  $\mathcal{E} \approx \mathbb{R}^3$ ,  $R^{\text{can}}: X \rightarrow (e_1, e_2, e_3)$

- Trivialisation du fibré des repères  $\mathcal{R}(\mathcal{E})$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(\mathcal{E}) & \rightarrow & \mathcal{E} \times \text{GL}_3(\mathbb{R}) \\ R_X & \rightarrow & (X, G) \end{array}$$

G est la **matrice de changement de base** entre  $R_X$  et  $R^{\text{can}}$

- Les transformations inversibles agissent à droite sur les repères :

$$R_X A \rightarrow (X, GA) \quad A \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$$

# Configuration généralisées

- Un **repère mobile** est une application lisse  $R: X \rightarrow R_X$

- Une **configuration généralisée**  $\mathcal{K}$  est un **repère mobile** sur la **configuration**  $\Omega$  (classique) de la **fibre neutre** [Cosserat et Cosserat, 1909]

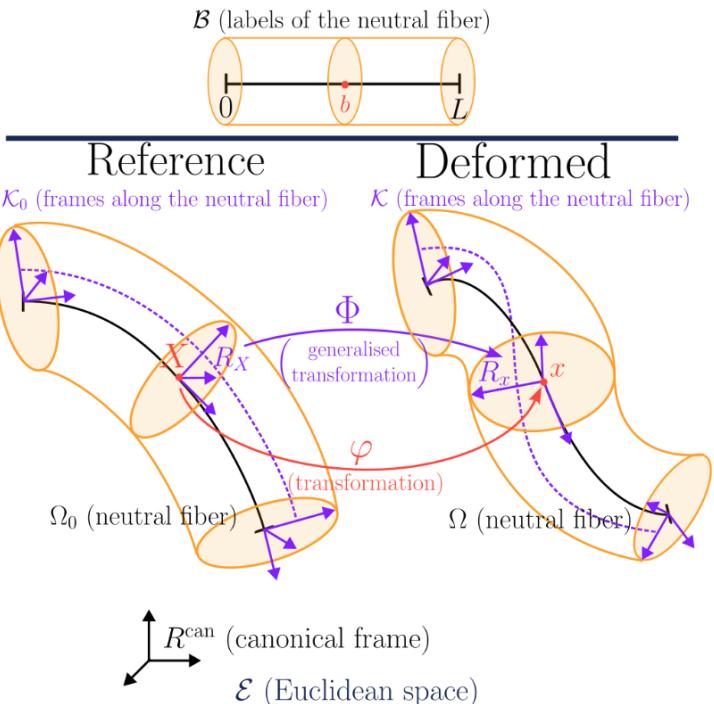
- $\mathcal{B} = [0, L]$  est le **body** (label des particules) ;
- $p: \mathcal{B} \rightarrow \Omega$  est le **plongement (classique)** des **origines des repères** ;
- $P: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{K}$  est le « **plongement** » **généralisé**.

- Configurations de **référence** :

- Généralisée  $\mathcal{K}_0$  / classique  $\Omega_0$

- Configurations **déformées** :

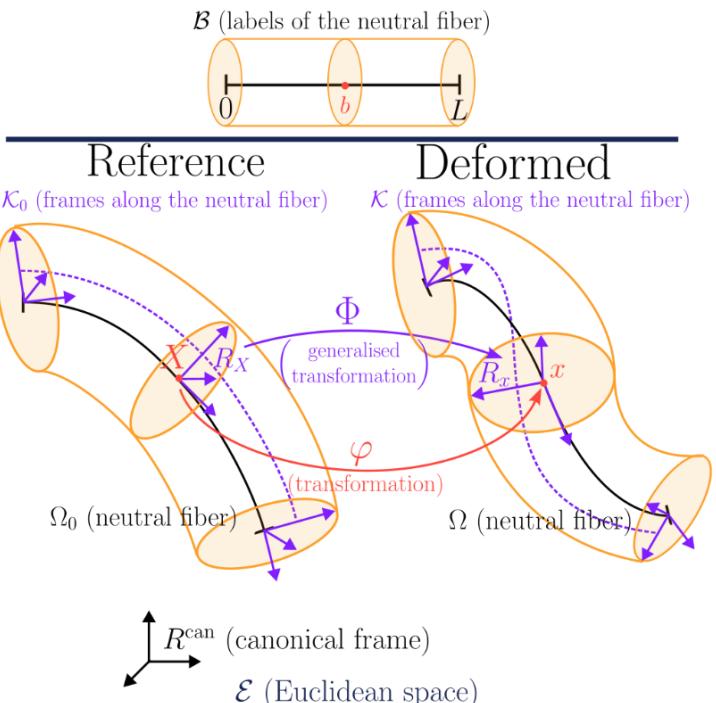
- Généralisée  $\mathcal{K}$  / classique  $\Omega$



# Transformation généralisée

- Un **repère mobile** est une application lisse  $R: X \rightarrow R_X$
- Une **configuration généralisée**  $\mathcal{K}$  est un **repère mobile** sur la **configuration**  $\Omega$  (classique) de la **fibre neutre**

- La **transformation généralisée**  $\Phi$  :
  - Envoie les repères de  $\mathcal{K}_0$  sur les repères de  $\mathcal{K}$  ;
  - L'image de tout repères sur la fibre neutre peut être déduit par :
- $\Phi(R_X \mathbf{A}) = \Phi(R_X) \mathbf{A}, \quad \forall \mathbf{A} \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$
- $\Phi$  contient aussi la **transformation**  $\varphi: \Omega_0 \rightarrow \Omega$  de la fibre neutre
  - Si  $R_X$  est un repère en  $X$  de  $\Omega_0$  ;
  - Alors  $\Phi(R_X)$  est un repère en  $\varphi(X)$  de  $\Omega$ .
- Existe et est unique entre deux configurations généralisées.



# Transformation généralisée

## - Définition géométrique de la micro-déformation

- La transformation généralisée  $\Phi: \pi^{-1}(\Omega_0) \rightarrow \pi^{-1}(\Omega)$

$$\pi(R_X) = X$$

- La transformation généralisée induit une transformation entre les espaces tangents des configurations classiques différente de  $\mathbf{F} = T\varphi$

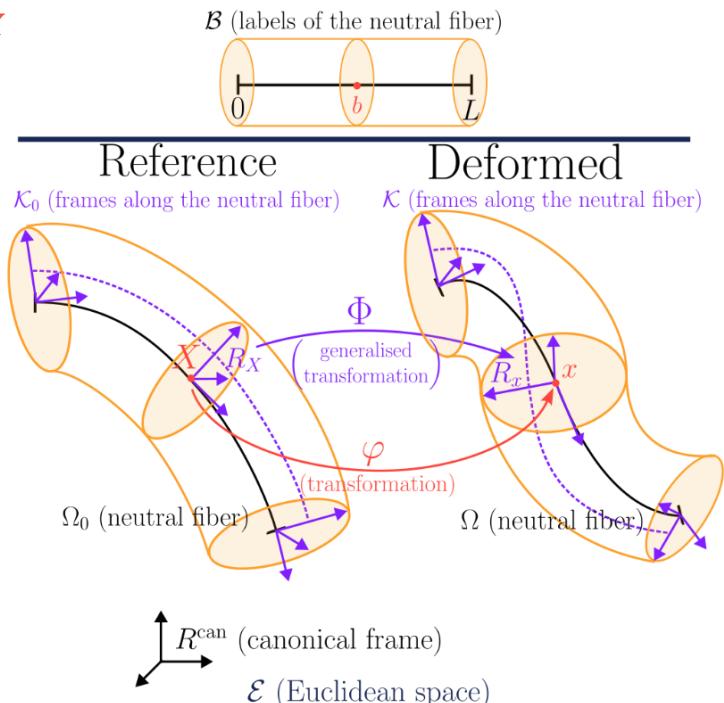
- La micro-déformation  $\chi_X: T_X \mathcal{E} \rightarrow T_{\varphi(X)} \mathcal{E}$  [Eringen, 1999] :

Pour  $R_X$  un repère en  $X \in \Omega_0$  :

$$\chi_X := \Phi(R_X)R_X^{-1}$$

- $\chi_X$  ne dépend que de  $X$  car :  $\forall A \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$

$$\chi_X := \Phi(R_X)R_X^{-1} = \Phi(R_X A)(R_X A)^{-1}$$



# Transformation généralisée

## - Représentation matricielle de la micro-déformation

- La **micro-déformation**  $\chi_X: T_x \mathcal{E} \rightarrow T_{\varphi(X)} \mathcal{E}$

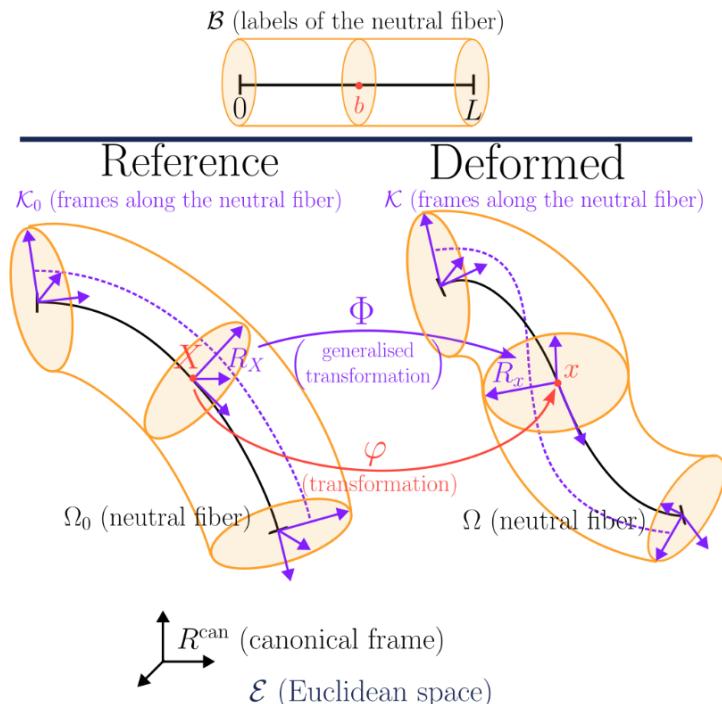
- Sa **représentation matricielle**  $[\chi_X]$  dans le repère  $R^{\text{can}}$  :

$$[\chi_X] = R^{\text{can}}(\mathbf{x})^{-1} \chi_X R^{\text{can}}(X)$$

- S'identifie à la transformation généralisée  $\Phi$  dans la trivialisation :

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{E} \times \text{GL}_3(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{E} \times \text{GL}_3(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} X \\ \mathbf{G} \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{x} = \varphi(X) \\ \mathbf{g} = [\chi_X]\mathbf{G} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $[\chi_X]$  et  $\chi_X$  sont en général confondus.



# Classification des milieux généralisés

## - Milieux 3D micromorphes

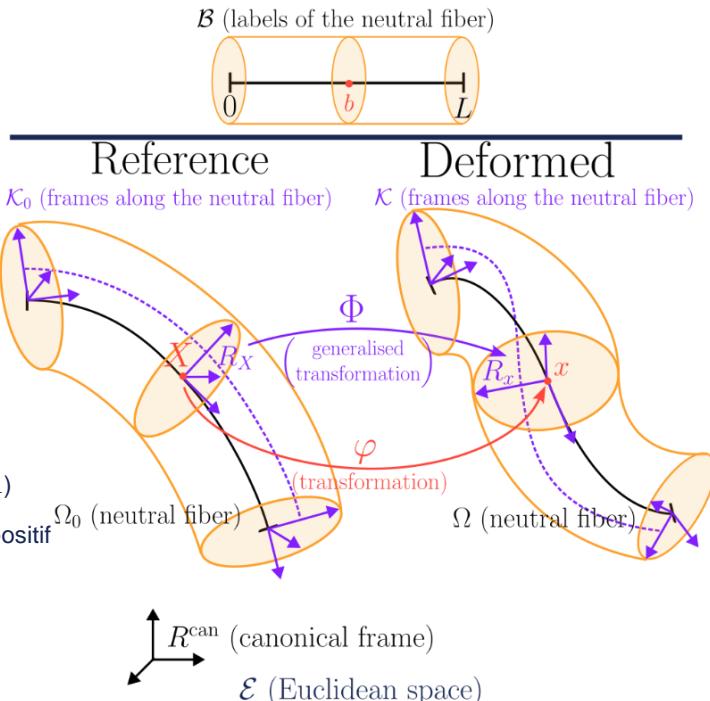
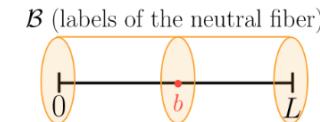
- La **micro-déformation**  $\chi_x : T_x \mathcal{E} \rightarrow T_{\varphi(x)} \mathcal{E}$  ;

- Pour  $H$  un sous groupe fermé de  $GL_3(\mathbb{R})$  :

- S'il existe un **ensemble de repères** sur lequel toute paire de repères mobiles est reliée par une unique **fonction de transition** lisse à valeurs dans  $H$ ;
- Alors on peut limiter les **configurations généralisées** à ces repères et  $[\chi_x] \in H$  ;
- Possible si  $H$  vérifie une certaine condition [Kobayashi, 1995].

- La **réduction du groupe structural** donne une famille de théories micromorphes :

Milieu micromorphe	Groupe $H$
Micromorphe [Eringen, 1999]	$GL_3(\mathbb{R})$
Micromorphe Incompressible	$SL_3(\mathbb{R})$
"Micro-strain" [Forest et Sievert, 2006b]	$Diag_3(\mathbb{R}_+^*)$
"Micro-stretch" [Eringen, 1999]	$CO(3)$
Cosserat [Cosserat et Cosserat, 1909]	$SO(3)$
Micro-dilatations [Cowin, 1985]	$\mathbb{R}_+^*$
Cauchy	$\{\text{id}_{GL_3(\mathbb{R})}\}$



- $SL_3(\mathbb{R}) =$  Spécial Linéaire ( $\det = 1$ )
- $Diag_3(\mathbb{R}_+^*) =$  Diagonal 3x3 défini positif
- $CO(3) \approx \mathbb{R}_+^* \times SO(3) =$  Conforme

# Classification des milieux généralisés

## - Milieux 3D du second gradient

■ La **micro-déformation**  $\chi_X : T_X \mathcal{E} \rightarrow T_{\varphi(X)} \mathcal{E}$  ;

■ Par **contraintes cinématiques** entre  $\chi_X$  et **F (gradient de la transformation)** :

- $\chi_X = F$  donne la théorie du « Strain-gradient ».

■ On obtient d'autres théories avec la **réduction du groupe structural** et la **décomposition polaire (RU)**

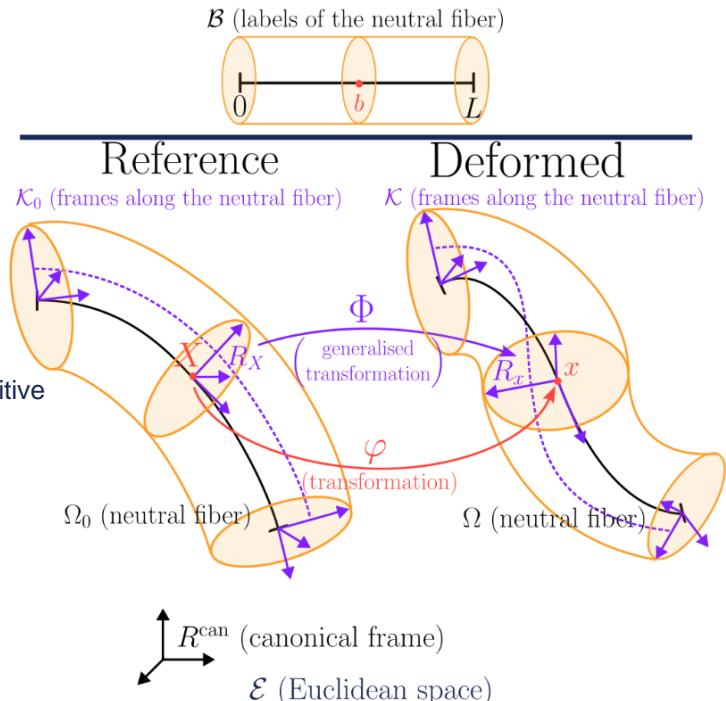
- Entre  $[\chi_X]$  et la représentation matricielle de **F** ;

$$O(3) \times S_3^+(\mathbb{R}) \rightarrow GL_3(\mathbb{R})$$

$$(R, U) \mapsto RU$$

$S_3^+(\mathbb{R})$  = Symétrique définie positive

Milieu micromorphe	Groupe $H$	Milieu du second gradient contraint
Micromorphe [Eringen, 1999]	$GL_3(\mathbb{R})$	“Strain-gradient” [Mindlin et Eshel, 1968]
Micromorphe Incompressible	$SL_3(\mathbb{R})$	?
“Micro-strain” [Forest et Sievert, 2006b]	$Diag_3(\mathbb{R}_+^*)$	“Stretch-gradient” [Auffray, 2013]
“Micro-stretch” [Eringen, 1999]	$CO(3)$	?
Cosserat [Cosserat et Cosserat, 1909]	$SO(3)$	Couples de contraintes [Toupin, 1962]
Micro-dilatations [Cowin, 1985]	$\mathbb{R}_+^*$	“Dilatation gradient” [Auffray, 2013]
Cauchy	$\{\text{id}_{GL_3(\mathbb{R})}\}$	-



# Classification des milieux généralisés

## - Poutres

- La **micro-déformation**  $\chi_X: T_X \mathcal{E} \rightarrow T_{\varphi(X)} \mathcal{E}$  ;

- Une **configuration 3D**  $\tilde{\Omega}$  d'une poutre est donnée par :

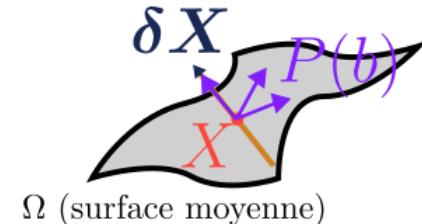
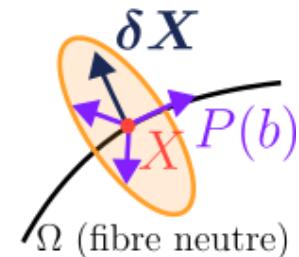
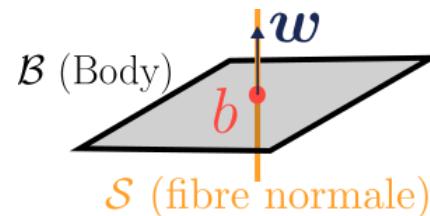
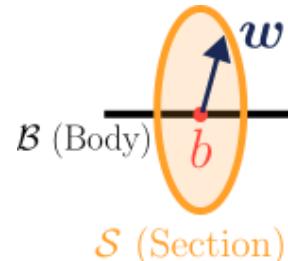
$$\begin{aligned}\mathcal{B} \times \mathcal{S} &\rightarrow \quad \tilde{\Omega} \subset \mathcal{E} \\ (\mathbf{b}, \mathbf{w}) &\rightarrow \quad \mathbf{p}(\mathbf{b}) + \mathbf{P}(\mathbf{b}) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \mathbf{X} + \delta \mathbf{X}\end{aligned}$$

- La **section de la poutre**  $\mathcal{S}$  (dans  $\mathbb{R}^2$ ) ;
- $P, p$  les « plongements » généralisé et classique ;
- $\mathbf{P}(\mathbf{b}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  doit être tangent à la fibre neutre  $\Omega$ .

- La **transformation 3D**  $\tilde{\varphi}$  s'exprime alors :

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}: \quad \tilde{\Omega}_0 &\rightarrow \quad \tilde{\Omega} \\ \mathbf{X} + \delta \mathbf{X} &\rightarrow \quad \varphi(\mathbf{X}) + \chi_X \delta \mathbf{X}\end{aligned}$$

- $\delta \mathbf{X}$  est l'**unique vecteur** positionnant un point de l'espace relativement au barycentre de la section en  $\mathbf{X} = \mathbf{p}_0(\mathbf{b})$ .



# Classification des milieux généralisés

## - Poutres et Coques

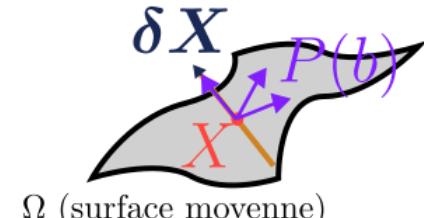
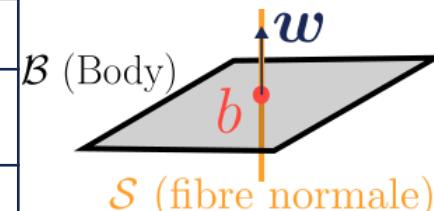
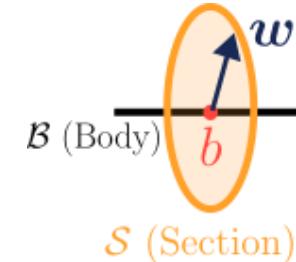
- La **micro-déformation**  $\chi_X: T_x \mathcal{E} \rightarrow T_{\varphi(X)} \mathcal{E}$  ;

- Une **configuration 3D**  $\tilde{\Omega}$  donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \times \mathcal{S} &\rightarrow \tilde{\Omega} \subset \mathcal{E} \\ (\mathbf{b}, \mathbf{w}) &\rightarrow p(\mathbf{b}) + P(\mathbf{b})(\tilde{\mathbf{w}}) = \mathbf{X} + \delta \mathbf{X} \end{aligned}$$

- En utilisant les résultats de **réduction structurale** et de **contraintes cinématique** on obtient les théories suivantes :

Milieu 3D	Coque	Poutre	Hypothèses physiques sur les sections
Micromorphe [Eringen, 1999]	?	[Choi, Kinkel et all, 2024]	Uniformément déformées et rotation libre
Micromorphe incompressible	?	Macroshear beam [Bousselmi, Chaouachi et all, 2019]	Uniformément déformées à volume constant et rotation libre
"Micro-stretch" [Eringen, 1999]	?	Macrodilatation beam [Bousselmi, Chaouachi et all, 2019]	Dilatation isotrope et rotation libre
Cosserat	Reissner-Mindlin	Simo-Reissner	Rigides et rotation libre
Couples de contraintes	Kirchhoff-Love	Kirchhoff	Rigides et orthogonale à la fibre neutre
Cauchy	Membranes	Barres	Rigides et sans rotations



# Conclusion

- Nous proposons une définition rigoureuse des **configurations généralisés** d'un milieu généralisé :
  - Par un « **plongement** » généralisé  $P$  : un **repère mobile** le long d'un plongement  $p$  du body  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{E}$  ;
  - Par la **transformation généralisé**  $\Phi: \pi^{-1}(\Omega_0) \rightarrow \pi^{-1}(\Omega)$  ;
  - Par la définition géométrique de la **micro-déformation**  $\chi_x: T_x \mathcal{E} \rightarrow T_{\varphi(x)} \mathcal{E}$  ;
- Cette définition donne les **cinématiques enrichies** des **coques et poutres**.
- Nous proposons une **classification unifiée** de la cinématiques des milieux généralisée en **toute dimension** :
  - Basé sur le groupe de transformation des repères mobiles (*réduction du groupe structural*) ;
  - Les milieux du **second gradient** sont obtenus par contrainte cinématique entre  $\chi$  et  $\mathbf{F}$ .

# Conclusion

Milieu 3D	Groupe $H$	Milieu du second gradient ?	Coques	Poutres	Hypothèses physiques sur les sections
Micromorphe [Eringen, 1999]	$GL_3(\mathbb{R})$	-	?	[Choi, Kinkel et all, 2024]	<b>Uniformément déformées et rotation libre</b>
"Strain-gradient" [Mindlin et Eshel, 1968]	$GL_3(\mathbb{R})$	OUI	?	?	<b>Déformation induite par allongement et courbure de la fibre neutre et orthogonale à la fibre neutre</b>
Micromorphe Incompressible	$SL_3(\mathbb{R})$	-	?	[Bousselmi, Chaouachi et all, 2019]	<b>Uniformément déformées à volume constant et rotation libre</b>
"Micro-strain" [Forest et Sievert, 2006b]	$Diag_3(\mathbb{R}_+^*)$	-	?	?	<b>Uniformément déformées et sans rotations</b>
"Stretch-gradient" [Auffray, 2013]	$Diag_3(\mathbb{R}_+^*)$	OUI	?	?	<b>Déformation induite par allongement et courbure de la fibre neutre et sans rotations</b>
"Micro-stretch" [Eringen, 1999]	$CO(3)$	-	?	[Bousselmi, Chaouachi et all, 2019]	<b>Dilatation isotrope et rotation libre</b>
Cosserat [Cosserat et Cosserat, 1909]	$SO(3)$	-	Reissner-Mindlin	Simo-Reissner	<b>Rigides et rotation libre</b>
Couples de contraintes [Toupin, 1962]	$SO(3)$	OUI	Kirchhoff-Love	Kirchhoff	<b>Rigides et orthogonale à la fibre neutre</b>
Micro-dilatations [Cowin, 1985]	$\mathbb{R}_+^*$	-	?	?	<b>Dilatation isotrope et sans rotations</b>
"Dilatation gradient" [Auffray, 2013]	$\mathbb{R}_+^*$	OUI	?	?	<b>Dilatation isotrope induite par allongement de la fibre neutre et sans rotations</b>
Cauchy	$\{\text{id}_{GL_3(\mathbb{R})}\}$	-	Membranes	Barres	<b>Rigides et sans rotations</b>

# Références

- [Truesdell et Noll, 1965] : Truesdell and Noll, *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, Springer
- [Forest, 2006a] : Forest, *Milieux continus généralisés et matériaux hétérogènes*, Mines de Paris
- [Eringen, 1999] : Eringen, *Microcontinuum Field Theories*, Springer
- [Mindlin et Eshel, 1968] : Mindlin and Eshel, *On first strain-gradient theories in linear elasticity*, International Journal of Solids and Structures
- [Boyer et Renda, 2017] : Boyer and Renda, *Poincaré's Equations for Cosserat Media: Application to Shells*, Journal of Nonlinear Science
- [Kröner, 1968] : Kröner, *Mechanics of Generalized Continua* : [...], IUTAM Symposium
- [Cosserat et Cosserat, 1909] : Cosserat et Cosserat, *Théorie des corps déformables*, A. Hermann et fils
- [Darboux, 1889] : Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces* [...], Gauthier-Villars et Fils
- [Breuneval, 1972] : Breuneval, *Géométrie des déformations des surfaces et équations de la mécanique des coques*, Université de Provence
- [Simo et Fox, 1989] : Simo et Fox, *On a stress resultant geometrically exact shell model*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering
- [Epstein et De León, 1998] : Epstein and De León, *On uniformity of shells*, International Journal of Solids and Structures
- [Yavari et Goriely, 2012] : Yavari and Goriely, *Riemann–Cartan Geometry of Nonlinear Dislocation Mechanics*, Archive for Rational Mechanics and Analysis
- [Cartan, 1935] : Cartan, *La méthode du repère mobile*, Actualités scientifiques et industrielles
- [Kobayashi, 1995] : Kobayashi, *Transformation Groups in Differential Geometry*, Springer
- [Forest et Sievert, 2006b] : Forest and Sievert, *Nonlinear microstrain theories*, International Journal of Solids and Structures
- [Toupin, 1962] : Toupin, *Elastic materials with couple-stresses*, Archive for Rational Mechanics and Analysis
- [Cowin, 1985] : Cowin, *The viscoelastic behavior of linear elastic materials with voids*, Journal of Elasticity
- [Auffray, 2013] : Auffray, *Geometrical Picture of Third-Order Tensors*, in *Generalized Continua as Models for Materials* (Altenbach 2013, Springer)
- [Choi, Kinkel et all, 2024] : Choi, Kinkel and all, *An objective [...] nonlinear elastodynamic beams with incompatible warping strains*, Multibody System Dynamics
- [Bousselmi, Chaouachi et all, 2019] : Bousselmi, Chaouachi and all, *Construction of new enriched beam models [...]*, International Journal of Mechanical Sciences