

Un problème de limite singulière pour les équations d'Euler-Korteweg

Quentin DIDIERLAURENT

Directeurs de thèse : Nicolas FAVRIE¹ et Bruno LOMBARD²

¹Institut Universitaire des Systèmes Thermiques et Industriels

²Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique

27 Aout 2025



Contexte général

- ◆ Modéliser la dynamique de la transition de phase au voisinage du point critique
 - modèle de fluide capillaire (milieu à **gradient**)
 - loi d'état non convexe (ex : Van der Waals)

Dôme de stauration (DS)

∉ DS : phase pure

- Euler (E)

$$\mathcal{E}_p = e_h(\rho, s)$$

∈ DS : diphasique, capillarité $\mathcal{K}(\rho)$

- Euler-Korteweg (EK)

$$\mathcal{E}_p = e_h(\rho, s) + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{K}}{\rho} |\nabla \rho|^2$$

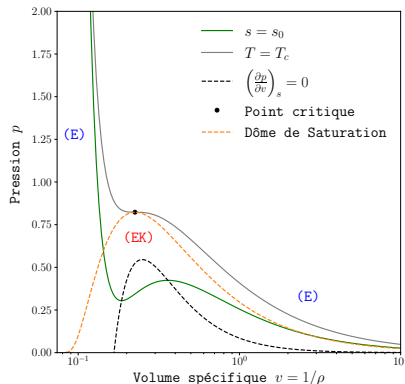


Figure: Loi d'état

Les difficultés

Physique :

- Choix de $\mathcal{K}(\rho)$?

Math & Num :

- Simulation numérique d'un milieu à gradient : $\mathcal{E}_p(\rho, \nabla \rho)$
↪ Ex : Schrödinger non linéaire
 Dahouadi, Favrie, Gavrilyuk, SAM 2020
- Le cas de loi d'état non convexe → En cours 
↪ Ex : Ruban bistable
 Bourgeois, Favrie, Bruno, IJSS 2022
- Modèle **unique** (E-EK) paramétré par ε :

$$\mathcal{E}_p = e_h(\rho, s) + \varepsilon^2 \frac{1}{2} \frac{\mathcal{K}}{\rho} |\nabla \rho|^2, \quad (\text{E}) \text{ si } \varepsilon = 0, \quad (\text{EK}) \text{ si } \varepsilon \neq 0$$

Question : Convergence de (EK) vers (E) pour $\varepsilon \rightarrow 0$?

Réponse : Non → Présentation d'aujourd'hui (1D)

Table des matières

- 1 Illustration de la limite singulière
- 2 Méthode du Lagrangien étendu
- 3 Méthode numérique & résultats

Table des matières

- 1 Illustration de la limite singulière
- 2 Méthode du Lagrangien étendu
- 3 Méthode numérique & résultats

Le modèle d'Euler-Korteweg 1D

Lagrangien de EK :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho u^2 - \left(\rho e_h + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \mathcal{K}(\rho_x)^2 \right), \quad s = s_0$$

Equations de la dynamique (par principe d'Hamilton) :

$$\text{EK : } \begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + \left(\rho u^2 + \rho^2 e_h' - \varepsilon^2 \left[(\rho \mathcal{K}' - \mathcal{K}) \frac{\rho_x^2}{2} + \mathcal{K} \rho \rho_{xx} \right] \right)_x = 0 \end{cases}$$

Toy model : Schrödinger non linéaire $\left(e_h = \frac{\rho}{2}, \mathcal{K} = \frac{1}{4\rho} \right)$

↪ solution exacte

Famille de modèles (ε)

Modèles :

Système dispersif $S_\varepsilon : \begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + \left(\rho u^2 + \frac{\rho^2}{2} - \frac{\varepsilon^2 \rho}{4} \left(\frac{\rho_x}{\rho} \right)_x \right)_x = 0 \end{cases}$

Système hyperbolique $S_0 : \begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + \left(\rho u^2 + \frac{\rho^2}{2} \right)_x = 0 \end{cases}$

Données initiales discontinues :

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} \rho_L & x < x_c \\ \rho_R & x > x_c \end{cases}, \quad u(x, 0) = 0, \quad \rho_L > \rho_R$$

U_ε : solution de S_ε , U_0 : solution de S_0

Question : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U_\varepsilon \stackrel{?}{=} U_0$

Comparaison des solutions : $\varepsilon^2 = 20$

 A. V. Gurevich and A. L. Krylov. 1987

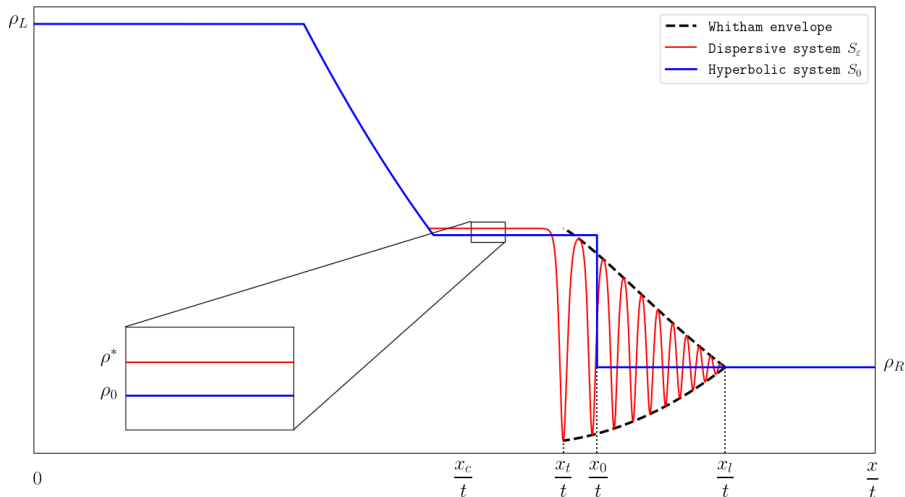


Figure: Solutions U_0 et U_ε

Comparaison des solutions : $\varepsilon^2 = 9$

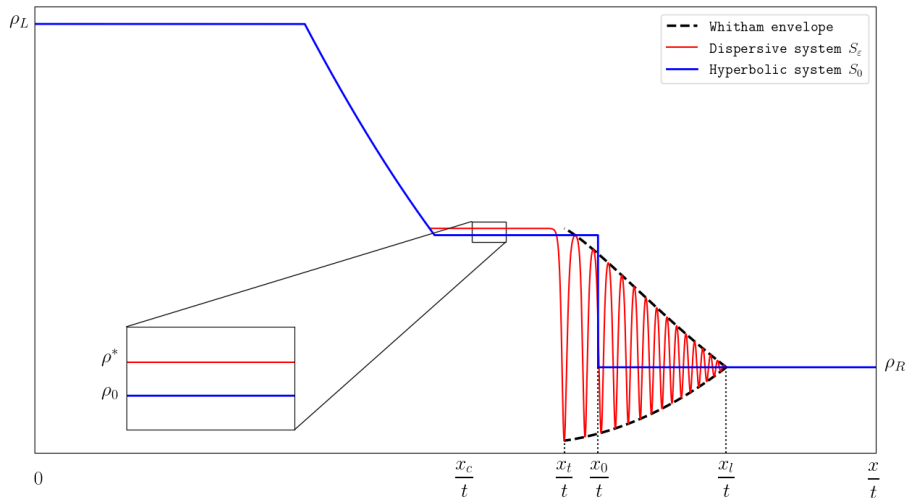


Figure: Solutions U_0 et U_ε

Comparaison des solutions : $\varepsilon^2 = 1$

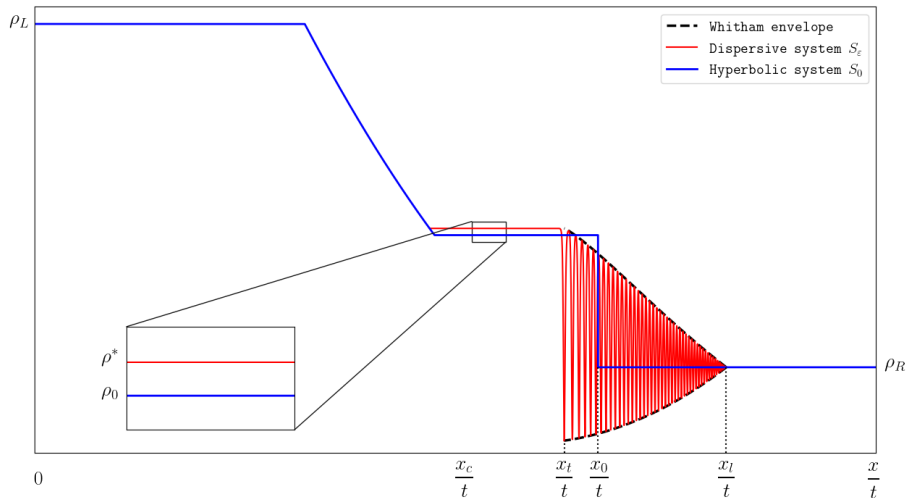


Figure: Solutions U_0 et U_ε

Observations :

$$\textcolor{red}{X} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U_\varepsilon \neq U_0$$

Explication sur un model simple :

 Lax, Levermore, CPAM 1983

$$\eta_t - 6\eta\eta_x + \varepsilon^2 \textcolor{red}{\eta_{xxx}} = 0$$

Analyse de type travelling wave :

train d'ondes oscillants $\longrightarrow$ **dispersif**

* Idée : Introduire une viscosité $\tau \textcolor{green}{\eta_{xx}}$  Johnson, JFM 1970

Ondes de choc visqueuses quand $\tau = \varepsilon$

Le modèle de Navier-Stokes-Korteweg

Introduction de la viscosité μu_x

$$\text{NSK} : \begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + \left(\rho u^2 + \rho^2 e_h' - \varepsilon^2 \left[(\rho \mathcal{K}' - \mathcal{K}) \frac{(\rho_x)^2}{2} + \mathcal{K} \rho \rho_{xx} \right] - \tau \mu u_x \right)_x = 0 \end{cases}$$

Analyse de type travelling wave :

$$\checkmark \tau^* = \varepsilon$$

$$\checkmark \mu^* = 2\rho \sqrt{\rho \mathcal{K}}$$

✗ Résolution numérique coûteuse de NSK : $\Delta t \sim (\Delta x)^3$

↪ Méthode du Lagrangien étendu

Table des matières

- 1 Illustration de la limite singulière
- 2 Méthode du Lagrangien étendu
- 3 Méthode numérique & résultats

Méthode du Lagrangien étendu

Lagrangien "maître" $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho u^2 - \left(\rho e_h + \frac{\mathcal{K}}{2} (\varepsilon \rho_x)^2 \right)$$

Variables & paramètres supplémentaires : η , $p = \eta_x$, $w = \frac{d\eta}{dt}$, λ , β

$$\mathcal{L}_e = \underbrace{\frac{1}{2} \beta w^2 + \frac{1}{2} \rho u^2}_{\text{énergie cinétique régularisée}} - \underbrace{\left(\rho e_h + \frac{\mathcal{K}}{2} (\varepsilon p)^2 + \frac{\lambda \rho}{2} \left(\frac{\eta}{\rho} - 1 \right)^2 \right)}_{\text{énergie potentielle pénalisée}}$$

Si $\eta = \rho + \mathcal{O}(1/\lambda) + \mathcal{O}(\beta)$ et $\beta \lesssim \varepsilon^2$:

$$\lim_{(\lambda, \beta) \rightarrow (\infty, 0)} \mathcal{L}_e = \mathcal{L}$$

-  Favrie, et Gavrilyuk. Nonlinearity (2017)
-  Dhaouadi, Favrie, et Gavrilyuk. SAM (2018)
-  Bourgeois, Favrie, et Lombard. IJSS (2020)

Le modèle de Navier-Stokes-Korteweg étendu : partie 1

Lagrangien étendu :

$$\mathcal{L}_e = \frac{1}{2} \beta w^2 + \frac{1}{2} \rho u^2 - \left(\rho e_h + \frac{\mathcal{K}}{2} (\varepsilon p)^2 + \frac{\lambda \rho}{2} \left(\frac{\eta}{\rho} - 1 \right)^2 \right)$$

Principe d'Hamilton :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + \left(\rho u^2 + \rho^2 e_h' + \frac{\varepsilon^2}{2} (\rho \mathcal{K}' + \mathcal{K}) p^2 + \lambda \eta \left(1 - \frac{\eta}{\rho} \right) \right)_x = 0 \\ (\rho \eta)_t + (\rho u \eta)_x = \rho w \\ (\rho w)_t + \left(\rho u w - \frac{\varepsilon^2}{\beta} \mathcal{K} p \right)_x = \frac{\lambda}{\beta} \left(1 - \frac{\eta}{\rho} \right) \\ p_t + (p u - w)_x = 0 \end{array} \right.$$

Le modèle de Navier-Stokes-Korteweg étendu : partie 2

Introduction de la viscosité μ

$$\text{NSK}_e : \begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + \left(\rho u^2 + \rho^2 e_h' + \frac{\varepsilon^2}{2} (\rho \mathcal{K}' + \mathcal{K}) p^2 + \lambda \eta \left(1 - \frac{\eta}{\rho} \right) \right)_x = 0 \\ (\rho \eta)_t + (\rho u \eta)_x = \rho w \\ (\rho w)_t + \left(\rho u w - \frac{\varepsilon^2}{\beta} \mathcal{K} p \right)_x = \frac{\lambda}{\beta} \left(1 - \frac{\eta}{\rho} \right) - \frac{\tau}{\beta} \frac{\mu}{\rho} \frac{w}{\rho} \\ p_t + (p u - w)_x = 0 \end{cases}$$

Valeurs propres :

$$\alpha_1 = u, \quad \alpha_{2,3} = u \pm \sqrt{\rho + \lambda \left(\frac{\eta}{\rho} \right)^2}, \quad \alpha_{4,5} = u \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4\beta\rho^2}}.$$

↪ Système hyperbolique

Table des matières

- 1 Illustration de la limite singulière
- 2 Méthode du Lagrangien étendu
- 3 Méthode numérique & résultats

Méthode numérique : volumes finis

Soit $\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho \eta, \rho w, p)^\top$, on a :

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = \mathbf{S}(\mathbf{U})$$

Godunov splitting :

Propagation : $\mathbf{U}_i^* = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^n - \mathbf{f}_{i-\frac{1}{2}}^n \right)$, schéma MUSCL-Hancock

Source : $\mathbf{U}_i^{n+1} = \begin{cases} \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \\ \text{CI : } \mathbf{U}_i^* \end{cases}$, résolution exacte

 E.F. Toro, (1999)

 R.J. LeVeque, (2002)

Conditions initiales

Domaine spatial $x \in [0, 500]$, $x_0 = 250$

$$\text{IC : } \begin{cases} \rho(x, 0) = \frac{\rho_L + \rho_R}{2} + \frac{\rho_R - \rho_L}{2} \tanh\left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right), & \rho_L = 5, \rho_R = 1, \gamma = 0.1, \\ u(x, 0) = 0 \\ \eta(x, 0) = \rho(x, 0) \\ w(x, 0) = 0 \\ p(x, 0) = \rho_x(x, 0) \end{cases}$$

Paramètres :

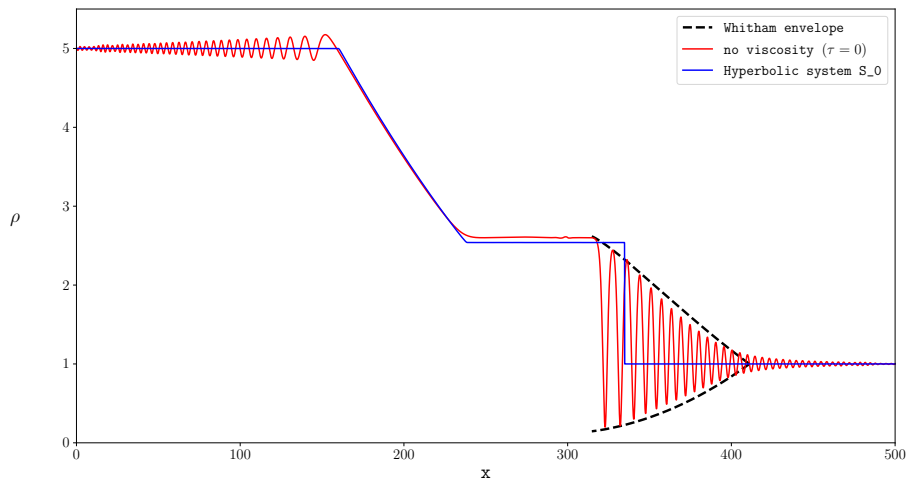
$$N_x = 32768, \quad \lambda = 500, \quad \text{CFL} = 0.9, \quad t = 40$$

Rappel :

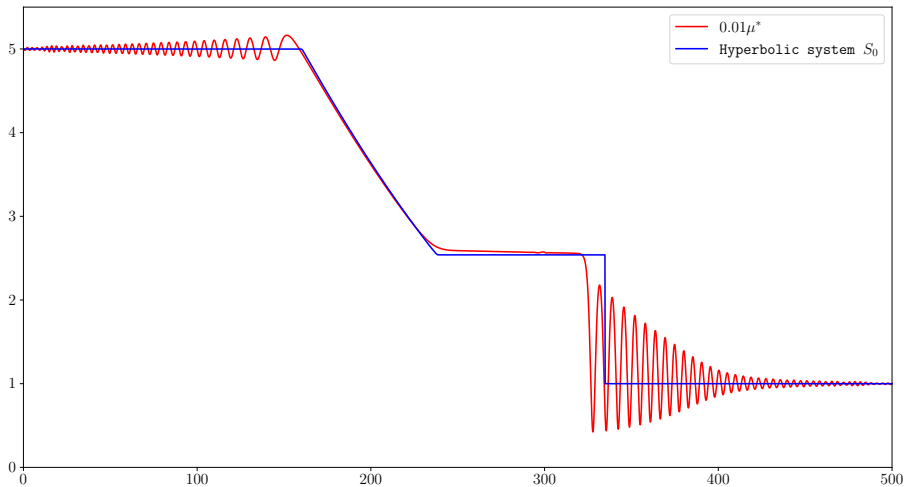
$$\mu^* = 2\rho\sqrt{\rho\mathcal{K}}$$

➤ Illustrations numériques pour μ^* fixe avec τ et β variables

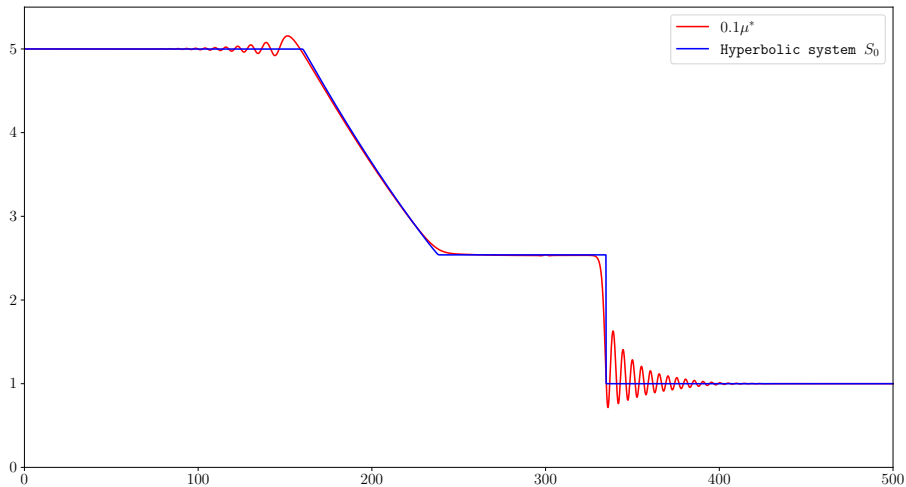
Sans viscosité : $\tau = 0$, $\varepsilon = 3$, $\beta = 10^{-3}$



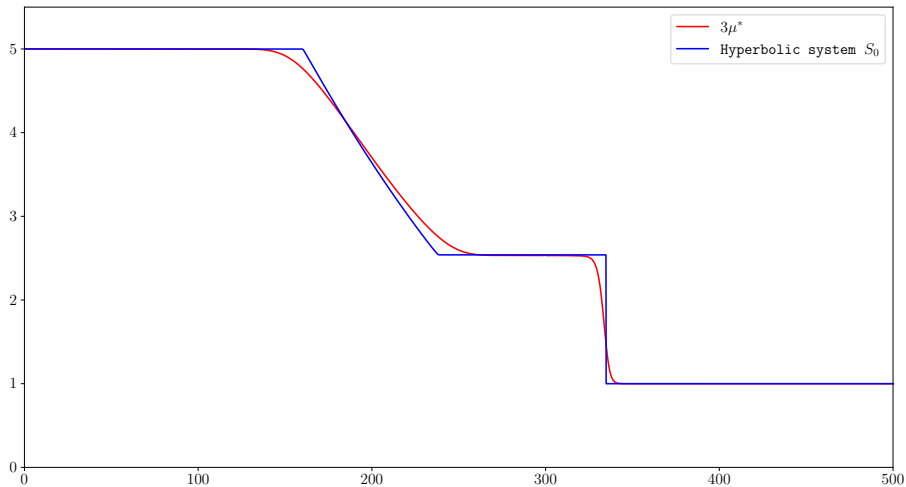
Faible viscosité : $\tau = 0.01$, $\varepsilon = 3$, $\beta = 10^{-3}$



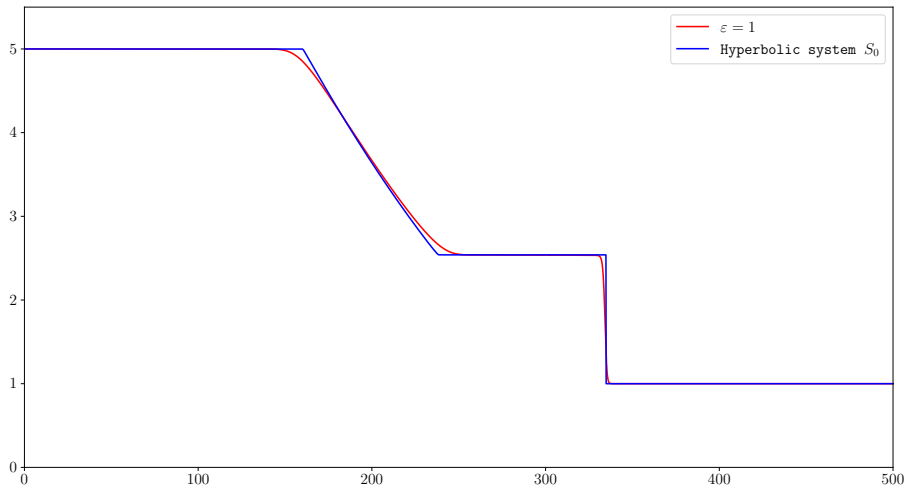
Faible viscosité : $\tau = 0.1$, $\varepsilon = 3$, $\beta = 10^{-3}$



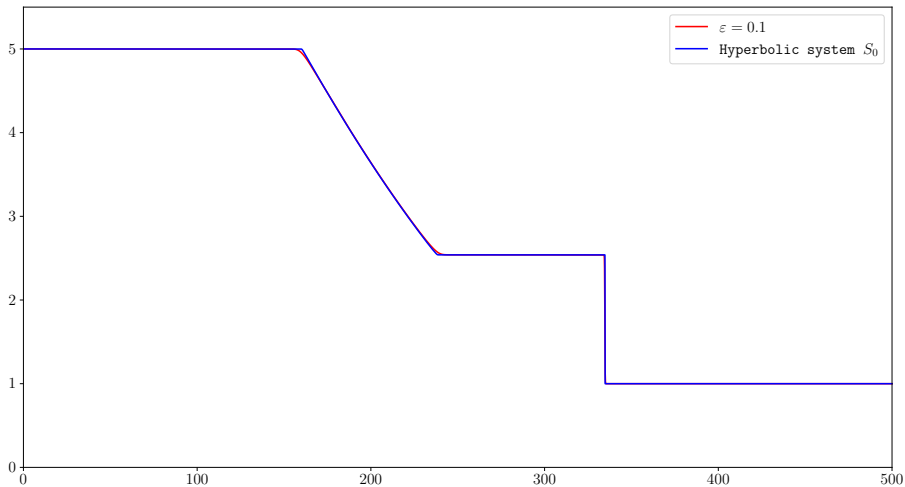
Viscosité optimale : $\tau^* = 3 = \varepsilon$, $\beta = 10^{-3}$



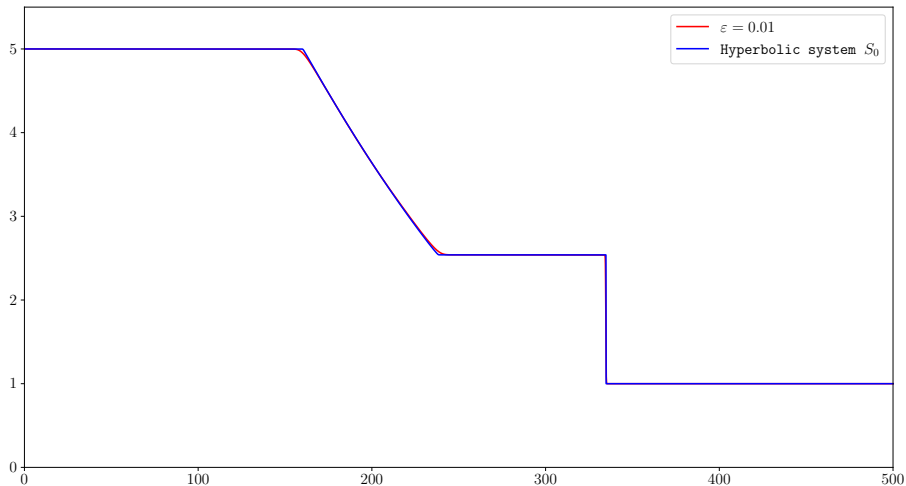
Limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$: $\tau = \varepsilon = 1$, $\beta = 10^{-3}$



Limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$: $\tau = \varepsilon = 0.1$, $\beta = 10^{-5}$



Limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$: $\tau = \varepsilon = 0.01$, $\beta = 10^{-7}$



Conclusion & perspectives

En résumé :

- ✓ Illustration d'une limite singulière : choc dispersif $\neq$ choc classique
- ✓ EK : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U_{\varepsilon} \neq U_0$
- ✓ NSK : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U_{\varepsilon, \tau^*} = U_0$

↪ Article :  Didierlaurent, Favrie et Lombard. SAM (2025)

Perspectives :

- 👉 Loi d'état non convexe avec plusieurs espèces (en cours )
- 👉 Extension 2D

Sans régularisation

