

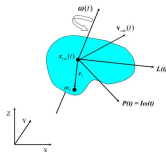
Une théorie géométrique des intégrateurs de Poisson pour la mécanique hamiltonienne

Oscar Cosserat

Göttingen mathematisches Institut

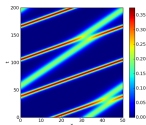
Août 2025, Congrès Français de Mécanique

La géométrie de Poisson en mécanique



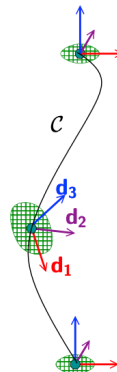
EDO : Moment angulaire du solide rigide

Image: M. A. Christon



EDP : Korteweg-de Vries

Image: W. Weckesser



EDP : modèle de Timoshenko

Image: L. Le Marrec

Un outil pour les invariants en mécanique

Groupe	Hamiltonien	Équation
$SO(3)$	$H(x) = \text{Tr}(x.I.x^T)$	Solide rigide
$\text{Diff}(S^1)$	$H(u) = \int_{S^1} u^2$	Burgers non visqueux
$\text{Diff}(S^1) \ltimes \mathbb{R}$	$H(u, c) = c^2 + \int_{S^1} u^2$	Korteweg-de Vries
$\text{Diff}(S^1) \ltimes \mathbb{R}$	$H(u, c) = c^2 + \int_{S^1} u^2 + (u')^2$	Camassa-Holm
$\text{Diff}_\mu(M)$	$H(u) = \int_M \ u\ ^2 d\mu$	Fluide d'Euler
$\text{Diff}(M) \ltimes \mathcal{C}^\infty(M)$	$H(u, \rho) = \int_M \rho \ u\ ^2 + f(\rho) d\mu$	Fluide barotrope

Ces équations sont **invariantes** par une action de groupe et donc admettent des **symétries**.

La géométrie de Poisson apparaît aussi en thermodynamique¹, dynamique moléculaire², théorie du contrôle...

¹Dynamics and thermodynamics of complex fluids, Grmela, Öttinger, 1997

²Exact geometric theory of dendronized polymer dynamics, Gay-Balmaz, Holm, Putkaradze, Ratiu, 2011

Structure de Poisson

Définition

Dans \mathbb{R}^n , une structure de Poisson est un champ de matrices anti-symétriques $\pi: \mathbb{R}^n \longrightarrow so(n)$ vérifiant l'identité de Jacobi:

$$x \longrightarrow \pi(x)$$

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0,$$

où

$$\{f, g\}(x) = \nabla_x f^T \cdot \pi(x) \cdot \nabla_x g$$

est le crochet de Poisson des fonctions f et g .

Exemples

Exemple

- 1 *La structure de Poisson symplectique en coordonnées canoniques dans l'espace $\{(q, p)\}$ des positions-impulsions*

$$\pi(q, p) = \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix},$$

- 2 *dans \mathbb{R}^3 , $\pi(x_1, x_2, x_3) =$*
- $$\begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix},$$

- 3 *dans \mathbb{R}^3 , $\pi(x_1, x_2, x_3) =$*
- $$\begin{pmatrix} 0 & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ -x_1 x_2 & 0 & x_2 x_3 \\ -x_1 x_3 & -x_2 x_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemples de systèmes hamiltoniens $\dot{x} = \pi(x) \cdot \nabla_x H$

Exemple

1 *Hamiltonien de la mécanique classique*

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} \|p\|^2 + V(q): \begin{cases} \dot{q} = -\frac{p}{m} \\ \dot{p} = \nabla_q V \end{cases}.$$

2 *Dynamique du solide rigide*

$$H(x) = \frac{1}{2} \left(i_1(x_2^2 + x_3^2) + i_2(x_1^2 + x_3^2) + i_3(x_1^2 + x_2^2) \right) : \\ \dot{x} = -x \wedge I.x$$

3 *Lotka-Volterra* $H(x) = x_1 + x_2 + x_3 :$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_2 + x_3) \\ \dot{x}_2 = x_2(-x_1 + x_3) \\ \dot{x}_3 = -x_3(x_1 + x_2) \end{cases}.$$

Feuilletage symplectique et Casimirs

Théorème

*Toute structure de Poisson induit un feuilletage **singulier** de l'espace en variétés symplectiques.*

Remarque

*Il implique l'existence de fonctions locales constantes sur chaque feuille appelées **Casimirs**.*

Proposition

Une trajectoire hamiltonienne reste sur une feuille symplectique :
$$\text{si } \dot{x} = \pi(x) \cdot \nabla_x H,$$
alors $x(0)$ et $x(t)$ appartiennent à la même feuille.

Feuilletages symplectiques des exemples précédents

Exemple

1 Pour $\pi(q, p) = \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix}$, le feuilletage n'a qu'une seule feuille : l'espace tout entier.

2 Pour $\pi(x) = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$, les feuilles sont des sphères concentriques. Un Casimir est $x \mapsto \|x\|^2$.

3 Pour $\pi(x) = \begin{pmatrix} 0 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ -x_1x_2 & 0 & x_2x_3 \\ -x_1x_3 & -x_2x_3 & 0 \end{pmatrix}$, les feuilles sont des surfaces ou des points. Un Casimir est $(x, y, z) \mapsto \frac{xz}{y}$.

Définition

On définit un intégrateur par une famille : $\varphi_{\Delta t} : x_n \mapsto x_{n+1}$ dépendant du pas de temps Δt .

Definition

Dans l'espace $\{(q, p)\}$ des positions-impulsions, un intégrateur $\varphi_{\Delta t}$ est dit **symplectique** s'il préserve la structure de Poisson

$$\pi(q, p) = \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix} := J.$$

Les intégrateurs symplectiques servent en astrophysique³, en dynamique moléculaire⁴, en optique...

³ Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars , Springel et al., 2005

⁴ Computer "Experiments" on Classical Fluids, Verlet, 1967

Comment fabriquer un intégrateur symplectique ?

Ici $\pi = J$.

Un schéma de Runge-Kutta pour $\dot{x} = J \cdot \nabla_x H$ est de la forme

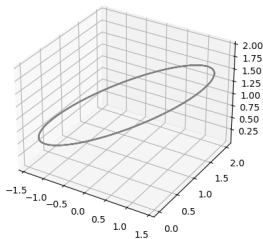
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i k_i \\ k_i &= J \cdot \nabla H(x_n + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j) \end{aligned} \quad (1)$$

où $x := (q, p)$.

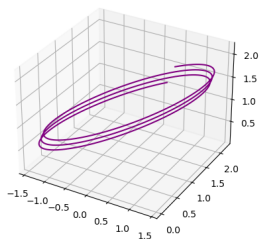
Théorème (Geometric Numerical Integration, Hairer et al., 2006)

*Si : $\forall (i, j), b_i a_{ij} + b_j a_{ji} = b_i b_j$,
alors le schéma est symplectique.*

Runge-Kutta Poisson ?



Une trajectoire hamiltonienne pour une structure de Poisson dans \mathbb{R}^3



Un intégrateur qui préserve cette structure de Poisson

Dans le cas général, il n'est pas suffisant de préserver la structure de Poisson. Un tel schéma, même d'ordre élevé, peut donner de mauvaises simulations numériques : *il détruit le feuilletage.*

Biréalisation

Définition

Une biréalisation d'une structure de Poisson π est un triplet (U, α, β) tel que:

- 1** *U est un voisinage de $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,*
- 2** *$\alpha, \beta: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des submersions, respectivement Poisson et anti-Poisson pour la structure symplectique canonique sur U , tel que*

$$\alpha(x, 0) = \beta(x, 0) = x,$$

- 3** *Les fibres de α sont symplectiquement orthogonales aux fibres de β :*

$$\forall f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \{\alpha^* f, \beta^* g\} = 0.$$

Équation de Hamilton-Jacobi

Théorème (C., 2022)

1 *L'équation de Hamilton-Jacobi*

$$\begin{cases} \partial_t S_t(x) &= H(\alpha(x, \nabla_x S_t)) \\ S_0 &= 0 \end{cases} \quad (2)$$

admet une unique solution $(S_t)_t$ pour t assez petit.

2 *Une telle solution permet de calculer le flot de H par:*

$$\begin{cases} \phi_t^H(x) = \beta(\bar{x}, \nabla_{\bar{x}} S_t) \\ \text{où } \bar{x} \text{ est l'unique solution de } \alpha(\bar{x}, \nabla_{\bar{x}} S_t) = x \end{cases}$$

Intégrateurs de Poisson hamiltoniens

Théorème (C., 2022)

Soit $S_t^i = \sum_{j=1}^i \frac{t^j}{j!} S_j$ solution de (2) à l'ordre i . Alors, l'intégrateur

$$\begin{cases} \alpha(\bar{x}_n, \nabla_{\bar{x}_n} S_{\Delta t}^i) &= x_n \\ x_{n+1} &= \beta(\bar{x}_n, \nabla_{\bar{x}_n} S_{\Delta t}^i) \end{cases}$$

est Hamiltonien de Poisson d'ordre i et de pas de temps Δt .

Remarques

- Méthode implicite
- Outils combinatoires pour l'équation de Hamilton-Jacobi⁵

⁵Butcher series for Hamiltonian Poisson integrators through symplectic groupoids, O.C., Busnot Laurent, 2025

Structure de Poisson et feuilletage symplectique

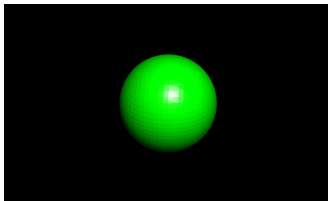
■ le crochet de Poisson

$$\{f, g\}(x) = (\nabla_x f)^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \nabla_x g$$

■ une biréalisation $\mathbb{R}^3 \simeq so(3)$

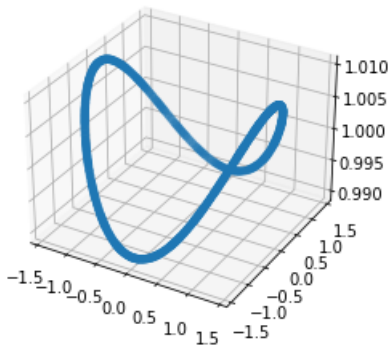
$$\begin{cases} \alpha: (x, p) \mapsto (I + \frac{p}{2}) \cdot x \cdot (I - \frac{p}{2}) \\ \beta: (x, p) \mapsto \alpha(x, -p) \end{cases}$$

■ une feuille symplectique



Le système hamiltonien du moment angulaire d'un solide rigide dans \mathbb{R}^3

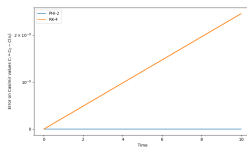
$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{1}{2} \left(i_1(x_2^2 + x_3^2) \right. \\ &\quad \left. + i_2(x_1^2 + x_3^2) \right. \\ &\quad \left. + i_3(x_1^2 + x_2^2) \right) \\ \Rightarrow \dot{x} &= -x \wedge I.x \end{aligned}$$



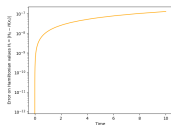
$$x(0) = (1, 1, 0)$$

Préservation du Casimir et oscillation contrôlée du hamiltonien

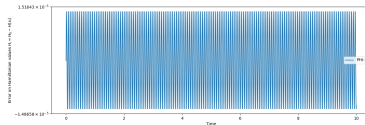
Numerical Methods in Poisson Geometry and Applications to Mechanics, O.C et al., 2024



Erreur sur la préservation du Casimir pour HPI-2 et RK-4



Erreur sur la préservation du hamiltonien pour RK-4



Erreur sur la préservation du hamiltonien pour HPI-2

Structure de Poisson et feuilletage du 3ème exemple

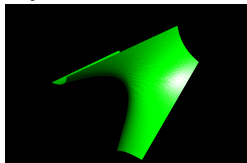
■ le crochet de Poisson

$$\{f, g\}(x) = (\nabla_x f)^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ -x_1 x_2 & 0 & x_2 x_3 \\ -x_1 x_3 & -x_2 x_3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \nabla_x g$$

■ une biréalisation

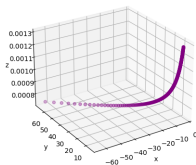
$$\begin{cases} \alpha: (x, p) \mapsto \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}(x_2 p_2 + x_3 p_3)} x_1 \\ e^{\frac{1}{2}(-x_1 p_1 + x_3 p_3)} x_2 \\ e^{-\frac{1}{2}(x_1 p_1 + x_2 p_2)} x_3 \end{pmatrix} \\ \beta: (x, p) \mapsto \alpha(x, -p) \end{cases},$$

■ une feuille symplectique



Une trajectoire hamiltonienne qui part à l'infini

$$H(x) = \sum_{i=1}^3 x_i \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_2 + x_3) \\ \dot{x}_2 = x_2(-x_1 + x_3) \\ \dot{x}_3 = -x_3(x_1 + x_2) \end{cases}$$



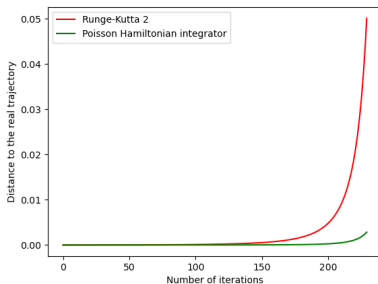
$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = -\infty \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = \infty \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x_3(t) = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Exploding for } \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 10^{-3} \end{pmatrix}$$

(Vanhaecke et al. 2016)

Simulation numérique: comparaison des erreurs numériques

Numerical Methods in Poisson Geometry and Applications to Mechanics, O.C et al., 2024



avec la valeur initiale $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 10^{-3} \end{pmatrix}$
et $\Delta t = 10^{-3}$.

Remarque

L'intégrateur hamiltonien de Poisson est d'ordre moins élevé.

Erreur avec la solution analytique

Une théorie géométrique des intégrateurs de Poisson

- Les **Biréalisations** permettent de construire des **intégrateurs de Poisson hamiltoniens** à tout ordre et pour tout hamiltonien.
- La géométrie différentielle permet d'expliquer leur bon comportement en temps long.

Perspectives

- Modèle de Timoshenko⁶
- Vlasov-Maxwell gyrocinétique

⁶Timoshenko beam under finite and dynamic transformations: Lagrangian coordinates and Hamiltonian structures, O.C., Le Marrec, 2025