

Anisotropie et hyper-élasticité : De l'équation d'Einstein à la loi de Hooke

Emmanuelle Rouhaud

Gamma3 UTT

Benoît Panicaud, UTT

Jacky Cresson, U. Pau

Richard Kerner, SU

Université de Bordeaux, jeudi 30 juin 2022

Cauchy

SUR L'ÉQUILIBRE

ET LE

MOUVEMENT INTÉRIEUR DES CORPS

CONSIDÉRÉS

COMME DES MASSES CONTINUES.



§ I. — *Formules générales.*

Dans la recherche des équations d'équilibre ou de mouvement des corps solides ou fluides, on peut considérer ces corps comme des masses continues, ou bien les regarder comme des systèmes de points matériels qui s'attirent ou se repoussent à de très petites distances. Dans la première hypothèse, il faut d'abord établir la théorie des pressions ou tensions exercées en un point donné d'un corps solide contre



les divers plans qu'on peut faire passer par ce même point. J'ai développé cette théorie dans le Tome II des *Exercices de Mathématiques* (1), et j'ai fait connaître les relations qui existent, dans le cas d'équilibre d'un corps solide ou fluide, entre les pressions ou tensions et les forces accélératrices. Si, pour fixer les idées, on désigne par x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque; par ρ la densité d'un corps au point (x, y, z) ; par p', p'', p''' les pressions ou tensions que supportent en ce point et du côté des coordonnées positives trois plans respectivement perpendiculaires aux axes coordonnés; par $A, F, E; F, B, D; E, D, C$ les projections algébriques des pressions p', p'', p''' sur ces mêmes axes; enfin, par X, Y, Z les projections algébriques de la force accélératrice appliquée au point (x, y, z) ; les relations dont il

- Bilan de puissance pour les transformations réversibles adiabatiques:

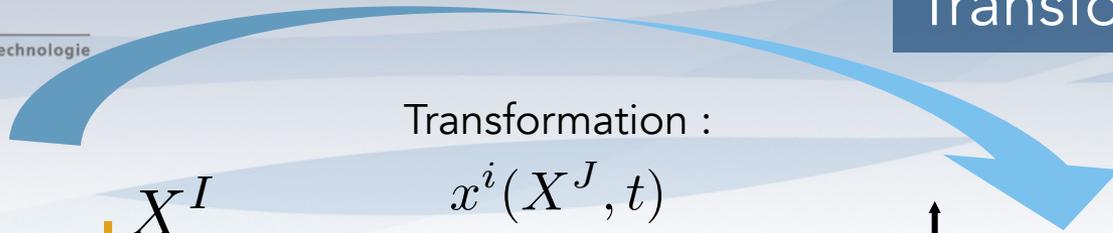
$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \rho \dot{\psi} = 0$$

$\boldsymbol{\sigma}$: tenseur des contraintes de Cauchy,
 \mathbf{d} : taux de déformations,
 ρ : masse volumique,
 ψ : énergie potentielle élastique.

- Si HPP avec $\rho \approx cte$ et $\mathbf{d} \approx \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$:

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$$

- Comment généralise-t-on pour les transformations finies ?

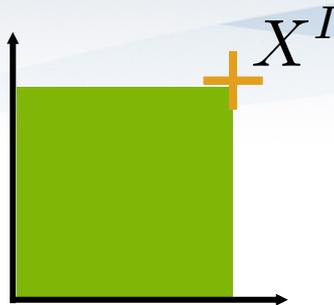


Transformation :

$$x^i(X^J, t)$$

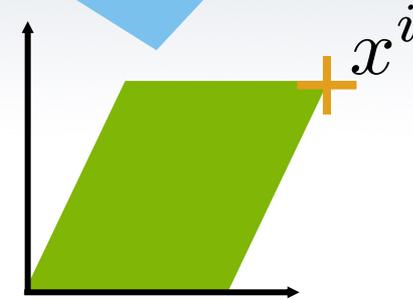
Application tangente F :

$$F^i_J = \frac{\partial x^i}{\partial X^J}$$



Configuration matérielle

ρ_0



Configuration actuelle

ρ

Masse volumique

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$$

Tenseur des déformations de Lagrange

\mathbf{S}

Second tenseur des contraintes de Piola-Kirschhoff (PK2)

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1})$$

Tenseur des déformations d'Euler

$\boldsymbol{\sigma}$

Tenseur des contraintes de Cauchy

- Comment généralise-t-on pour les transformations finies ?

- On part de : $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \rho \dot{\psi} = 0$

- On pose : $\dot{W} = \rho_0 \dot{\psi} \quad \longrightarrow \quad \frac{\rho_0}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \dot{W} = 0$

- Sur la configuration matérielle : $\frac{\rho_0}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = \mathbf{S} : \mathbf{D}$

- Transformations hyper-élastiques : $W(\mathbf{E})$

- Bilan de puissance sur la configuration matérielle

$$\longrightarrow \mathbf{S} : \mathbf{D} - \dot{W}(\mathbf{E}) = 0$$

\mathbf{S} : le second tenseur des contraintes de Piola-Kirschhoff (PK2),

\mathbf{D} : taux de déformations matériel

\mathbf{E} : tenseur des déformations de Lagrange

$\boldsymbol{\sigma}$: tenseur des contraintes de Cauchy, \mathbf{d} : taux de déformations,

ρ : masse volumique, ψ : énergie potentielle élastique.

- Comment généralise-t-on pour les transformations finies ?

- A partir de : $\mathbf{S} : \mathbf{D} - \dot{W}(\mathbf{E}) = 0$

- Sur la configuration actuelle :

avec $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}$

- Sur la configuration actuelle :

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} \longrightarrow \boldsymbol{\sigma} = -2 \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{b} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{b}}$$

si isotrope
+ objectivité

\mathbf{b} : tenseur des déformations eulérien

n'est pas
le bon
objet ?

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{D} \quad ? = \mathbf{d}$$



$v \ll c$

Quasi-statique
HPP

OK

Newton



$v \ll c$

Dynamique
Transformations finies

- Objectivité
- Variation / temps
- Pas inertiel
- Configurations (Euler/Lagrange)
- **Anisotropie et description eulérienne du mouvement**



$$v \ll c$$

Quasi-statique
HPP

OK

Approche classique



$$v \ll c$$

Dynamique
Transformations finies

- Objectivité
- Variation / temps
- Pas inertiel
- Configurations (Euler/Lagrange)
- **Anisotropie et description eulérienne du mouvement**



$V \approx c$ Champ de gravitation

Tout observateur :
Covariance

Relativité

- Contexte : hyper-élasticité
- **Aspects géométriques**
- Tenseur des déformations espace-temps
- Tenseur énergie-impulsion : approche variationnelle
- Hyper-élasticité anisotrope covariante
- Conclusion

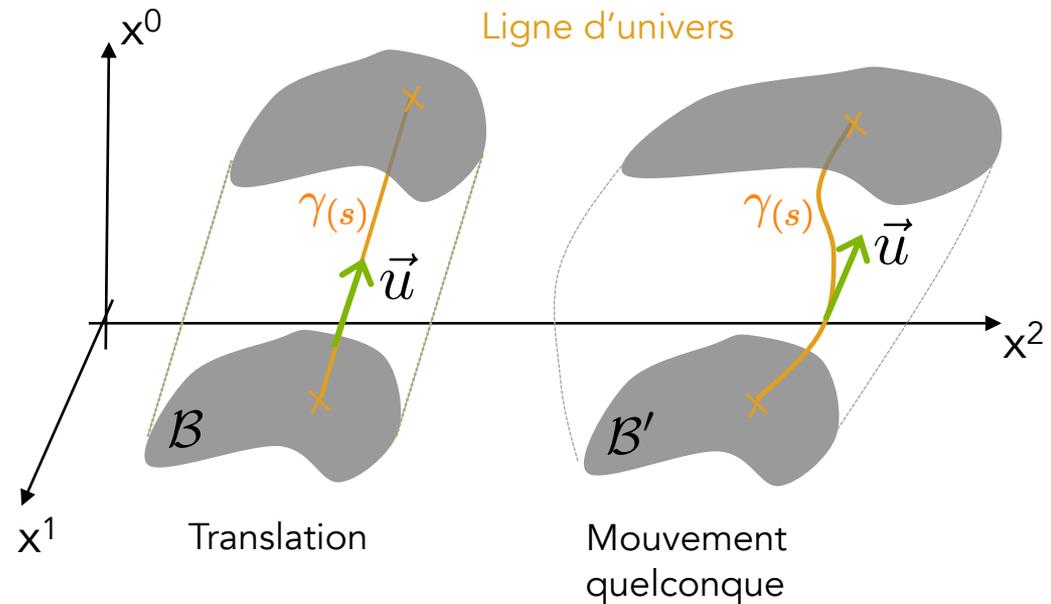
- Variété différentiable 4D riemannienne \mathcal{M}
tenseur métrique \mathbf{g} de signature $(1,-1,-1,-1)$
 - Un événement P : un point de \mathcal{M}
 - Un système de coordonnées défini pour un voisinage autour de P :
 $\{x^\mu\}, \mu = 0, 1, 2, 3$
 - **Observateur** : vecteurs de base dans l'espace tangent en P : $e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$
 - **Changement d'observateurs** = transformation : $e_\mu = \left(\frac{\partial x^\kappa}{\partial y^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^\kappa}$
- où la matrice $\left(\frac{\partial x^\kappa}{\partial y^\mu} \right)$ appartient au groupe $GL(4, \mathbb{R})$
- $\mathcal{M} \times GL(4, \mathbb{R})$ fibré principal sur \mathcal{M}

**Covariance = invariance par changement d'observateurs
= invariance par changement de coordonnées 4D**

- Ligne d'univers $\gamma(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$
- Vitesse $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ vecteur normé sans dimension
- Un corps \mathcal{B} est un volume, sous espace 3D, de \mathcal{M}

- Le mouvement de \mathcal{B} correspond à l'ensemble des lignes d'univers qui intersectent \mathcal{B}

- *Il n'y a pas de notion de configurations dans une description espace-temps.*



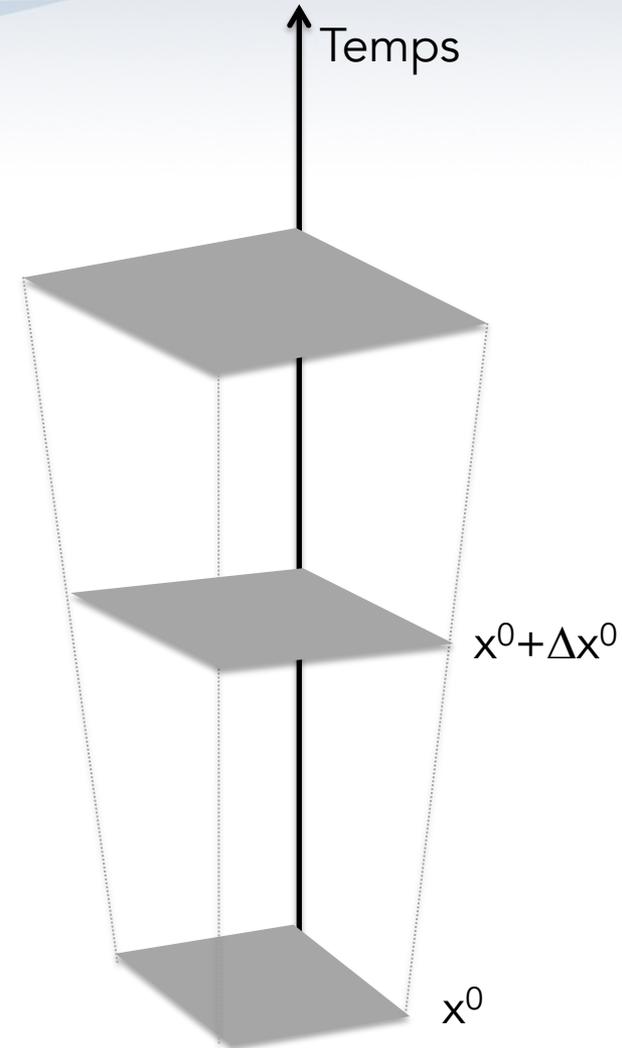
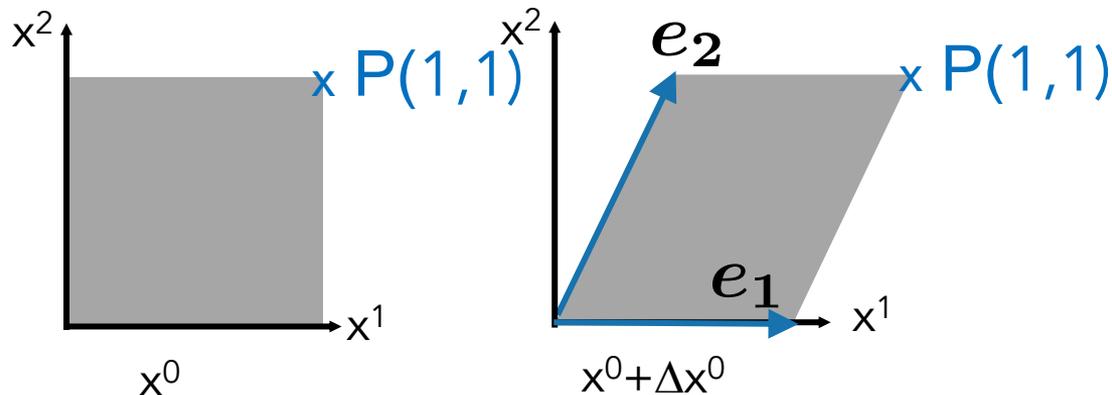
- **Observateur propre** X^μ tel que

$$u^\mu = \frac{dX^\mu}{ds} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en tout point}$$

- Matrice de passage $F: X^\mu \rightarrow x^\nu$

$$F^\mu{}_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\nu} \text{ et son inverse } F'$$

- Exemple avec un glissement :



- Contexte : hyper-élasticité
- Aspects géométriques
- **Tenseur des déformations espace-temps**
- Tenseur énergie-impulsion : approche variationnelle
- Hyper-élasticité anisotrope covariante
- Conclusion

- **Tenseur des déformations covariant**

- Tenseur dont les composantes dans le système de coordonnées propre sont :

$$\hat{b}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Tenseur des déformations : $b_{\mu\nu} = F'^{\lambda}_{\mu} F'^{\kappa}_{\nu} \hat{b}_{\lambda\kappa}$

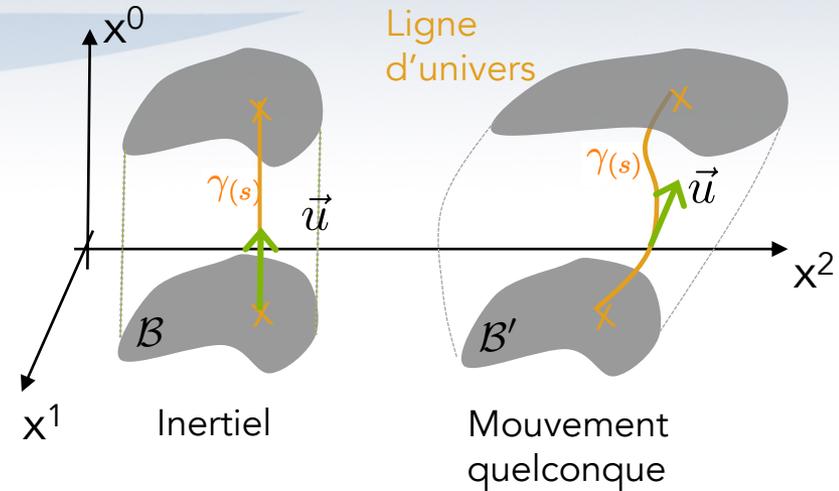
- On peut montrer que : $\mathcal{L}_u \mathbf{b} = 0$

- **Taux de déformations \mathbf{d}** : $\mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_u(\mathbf{g})$

- Pour un mouvement inertiel

Observateur propre = inertiel

$$u_0^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en tout point du mouvement}$$



- Taux de déformation :

$$d_0 = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{u_0}(\mathbf{g}) = 0$$

- Tenseur des déformations : $\mathbf{b}_0 = \mathbf{g}$

$$b_{\mu\nu} = F'^{\lambda}_{\mu} F'^{\kappa}_{\nu} \hat{b}_{\lambda\kappa} \quad \hat{b}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Contexte : hyper-élasticité
- Aspects géométriques
- Tenseur des déformations espace-temps
- Tenseur énergie-impulsion : approche variationnelle
- Hyper-élasticité anisotrope covariante
- Conclusion

- Densité d'énergie

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega} \mathcal{A} d\Omega \quad \mathcal{A} = \sqrt{g} A$$

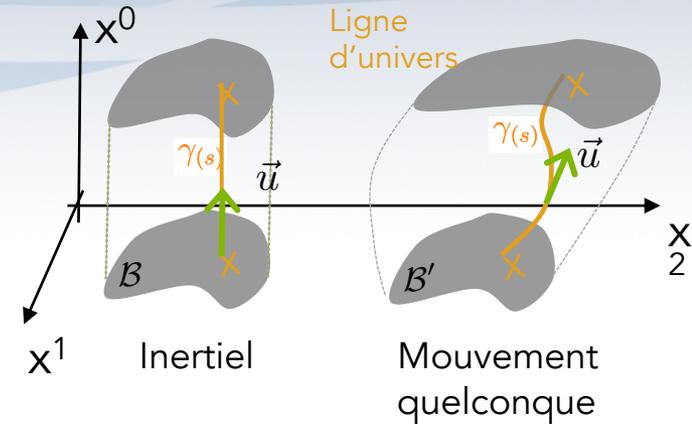
$$g = -|\mathbf{g}|$$

- Imposons : $\mathcal{L}_u(\mathcal{A}) = 0$

avec $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{g}}{2\kappa} (-2\Lambda + R(\mathbf{g})) + \mathcal{A}^M(\tilde{\rho}_c, \mathbf{g}, \mathbf{b})$

Géom. \mathcal{A}^G

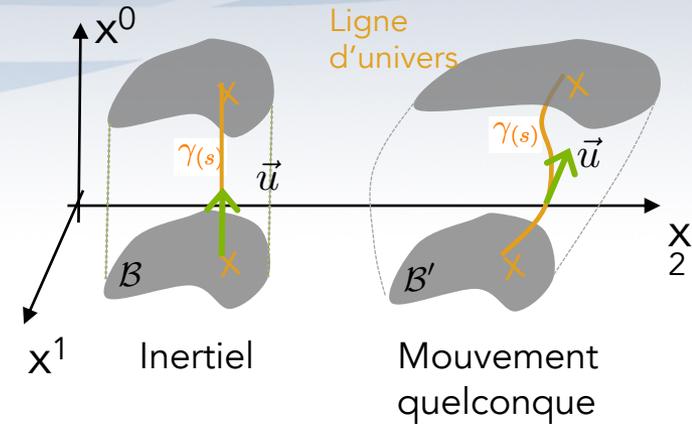
Matériau



- Densité d'énergie

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega} \mathcal{A} d\Omega \quad \mathcal{A} = \sqrt{g} A$$

$$g = -|\mathbf{g}|$$



- Imposons : $\mathcal{L}_u(\mathcal{A}) = 0$

avec $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{g}}{2\kappa} (-2\Lambda + R(\mathbf{g})) + \mathcal{A}^M(\tilde{\rho}_c, \mathbf{g}, \mathbf{b})$

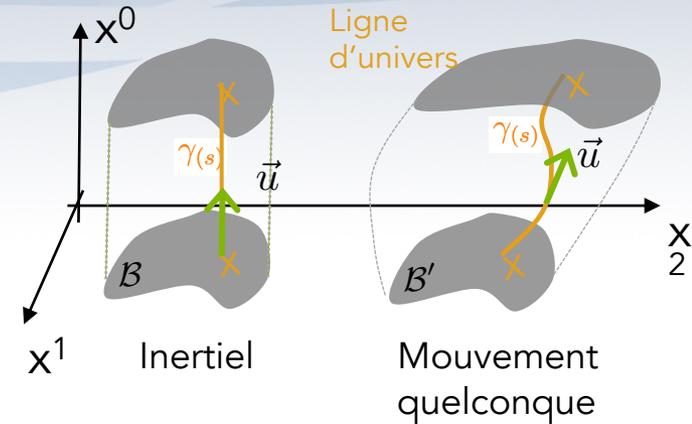
Géom. \mathcal{A}^G Matériau

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{A}^M}{\partial \tilde{\rho}_c} \mathcal{L}_u(\tilde{\rho}_c) + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathbf{g}} : \mathcal{L}_u \mathbf{g} + \frac{\partial \mathcal{A}^M}{\partial \mathbf{b}} : \mathcal{L}_u \mathbf{b} = 0$$

- Densité d'énergie

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega} \mathcal{A} d\Omega \quad \mathcal{A} = \sqrt{g} A$$

$$g = -|\mathbf{g}|$$



- Imposons : $\mathcal{L}_u(\mathcal{A}) = 0$

avec $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{g}}{2\kappa} (-2\Lambda + R(\mathbf{g})) + \mathcal{A}^M(\tilde{\rho}_c, \mathbf{g}, \mathbf{b})$

Géom. \mathcal{A}^G Matériau

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{A}^M}{\partial \tilde{\rho}_c} \mathcal{L}_u(\tilde{\rho}_c) + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathbf{g}} : \mathcal{L}_u \mathbf{g} + \frac{\partial \mathcal{A}^M}{\partial \mathbf{b}} : \mathcal{L}_u \mathbf{b} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial (\mathcal{A}^G + \mathcal{A}^M)}{\partial \mathbf{g}} : \mathcal{L}_u \mathbf{g} = 0$$

$$\frac{\partial(\mathcal{A}^G + \mathcal{A}^M)}{\partial \mathbf{g}} : \mathcal{L}_u \mathbf{g} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial \mathcal{A}^G}{\partial g_{\mu\nu}} + 2 \left[\frac{\partial \mathcal{A}^M}{\partial g_{\mu\nu}} \right]^S = 0$$

- On définit le tenseur énergie-impulsion
(généralisation 4D du tenseur des contraintes):

$$\mathbf{T} = 2 \left[\frac{\partial \mathcal{A}^M}{\partial \mathbf{g}} \right]^S \quad \text{et} \quad \nabla \mathbf{T} = 0$$

- Contexte : hyper-élasticité
- Aspects géométriques
- Tenseur des déformations espace-temps
- Tenseur énergie-impulsion : approche variationnelle
- **Hyper-élasticité anisotrope covariante**
- Conclusion

- Densité d'énergie : $\mathcal{A}^M(\tilde{\rho}_c, \mathbf{g}, \mathbf{b}) = \tilde{\rho}_c c^2 + \sqrt{g}W(\mathbf{g}, \mathbf{b})$

tel que, pour un mouvement inertiel : $W(\mathbf{g}, \mathbf{g}) = 0$

→
$$T^{\mu\nu} = 2 \left[\frac{\partial \mathcal{A}^M}{\partial g_{\mu\nu}} \right]^S = 2\sqrt{g} \left[\frac{\partial W}{\partial g_{\mu\nu}} \right]^S + (\tilde{\rho}_c c^2 + \sqrt{g}W)g^{\mu\nu}$$

$$T_0^{\mu\nu} = \tilde{\rho}_c c^2 g^{\mu\nu}$$

- Choix spécifique pour l'énergie W: $W(\mathbf{g}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{C}}{2} : (\mathbf{g} - \mathbf{b}) \otimes (\mathbf{g} - \mathbf{b})$

$$T^{\mu\nu} = (\tilde{\rho}_c c^2 + \sqrt{g}W) g^{\mu\nu} + 2\mathbf{C}^{\alpha\beta\mu\nu} (g_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta})$$

Une relation covariante, le matériaux peut être anisotrope

- Comment généralise-t-on pour les transformations finies ?

- A partir de : $\mathbf{S} : \mathbf{D} - \dot{W}(\mathbf{E}) = 0$

- Sur la configuration actuelle :

avec $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}$

- Sur la configuration actuelle :

$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} \longrightarrow \boldsymbol{\sigma} = -2 \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{b} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{b}}$
 si isotrope
 + objectivité

\mathbf{b} : tenseur des déformations eulérien

n'est pas le bon objet ?

$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{D} \quad \dot{\mathbf{?}} = \mathbf{d}$

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_u(\mathbf{g})$$



$$v \ll c$$

Quasi-statique
HPP

OK

Approche classique



$$v \ll c$$

Dynamique
Transformations finies

- Objectivité
- Variation / temps
- Pas inertiel
- Configurations (Euler/Lagrange)
- **Anisotropie et description eulérienne du mouvement**



$V \approx c$ Champ de gravitation

Tout observateur :
Covariance

Relativité



$$v \ll c$$

Quasi-statique
HPP

OK

Newton



$$v \ll c$$

Dynamique
Transformations finies

- ~~Objectivité~~ Covariance
- Variation / temps
- Pas inertielle
- ~~Configurations~~
(Euler/Lagrange)
- Anisotropie et description eulérienne du mouvement

Relativité



$V \approx c$ Champ de gravitation

Tout Observateur
4D: (ct,x,y,z)

Covariance



Centre Paul-Langevin

Le village de vacances situé à Aussois, petit village savoyard exposé plein sud aux portes du Parc National de la Vanoise à 1500 m d'altitude, est composé du centre Paul-Langevin. Un site idéal pour vivre des vacances familiales entre détente, loisirs, sports, mais aussi découverte, gastronomie, patrimoine...

Mecamat Aussois janvier 2023

Les grandes transformations : aujourd'hui et ... demain ?

Venez nombreux !

$$\sigma : d - \rho_0 \dot{\psi} \geq 0 \quad \psi(e)$$

Définition de la dérivée de Lie

$$\mathcal{L}_u(T)_{\mu\nu} = u^\lambda \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + T_{\lambda\nu} \frac{\partial u^\lambda}{\partial x^\mu} + T_{\mu\lambda} \frac{\partial u^\lambda}{\partial x^\nu} \quad \mathcal{L}_u(a) = \frac{da}{dt}$$

Dérivée de Lie de e $\mathcal{L}_v(e)_{\mu\nu} = d_{\mu\nu}$

$$\sigma : d - \rho \mathcal{L}(\psi) = 0 \quad \sigma : d - \rho \frac{\partial \psi}{\partial e} : d = 0$$

Espace-temps

Tenseur énergie-moment symétrique \mathbf{T} et :

$$\mathbf{T} = \mathcal{U} \vec{u} \otimes \vec{u} + \mathbf{T}_\sigma$$

(sans thermique). avec $\mathcal{U} = \rho c^2 + \rho \psi$

Exemple 2D + temps :

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \mathcal{U} & \mathcal{U}u^1 & \mathcal{U}u^2 \\ \mathcal{U}u^1 & \mathcal{U}(u^1)^2 & \mathcal{U}u^1u^2 \\ \mathcal{U}u^2 & \mathcal{U}u^1u^2 & \mathcal{U}(u^2)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma^{11} & -\sigma^{12} \\ 0 & -\sigma^{12} & -\sigma^{22} \end{pmatrix}$$

avec $\vec{u} \begin{pmatrix} u^0 = 1 \\ u^i = \frac{v^i}{c} \end{pmatrix}$

Conservation : $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$

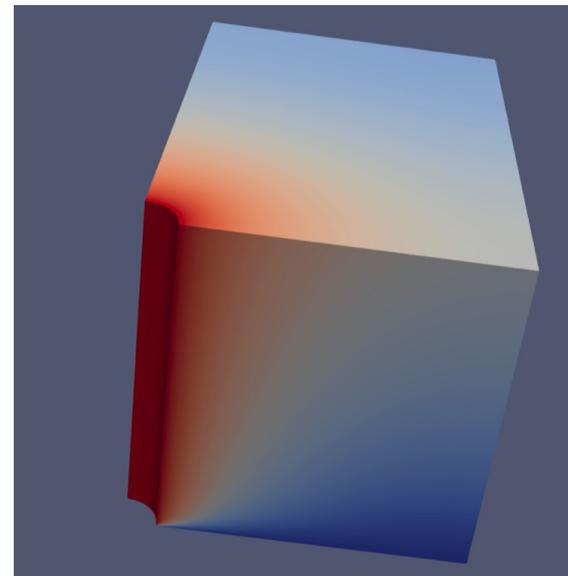
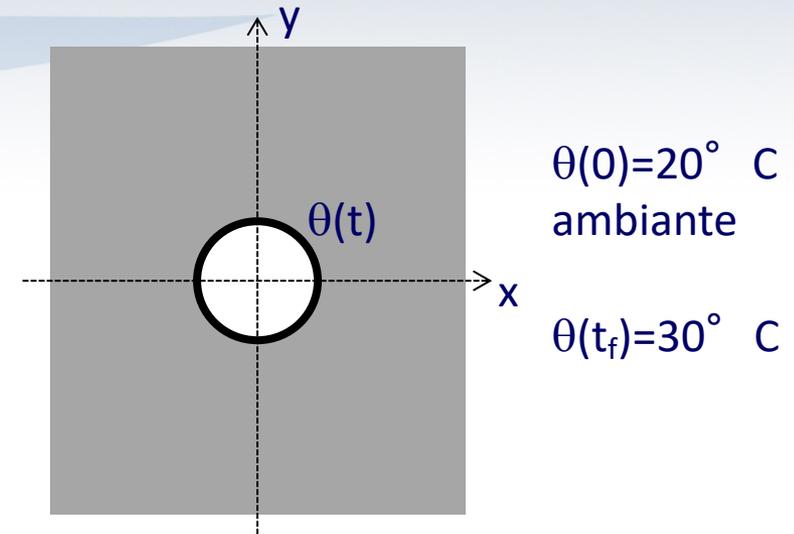
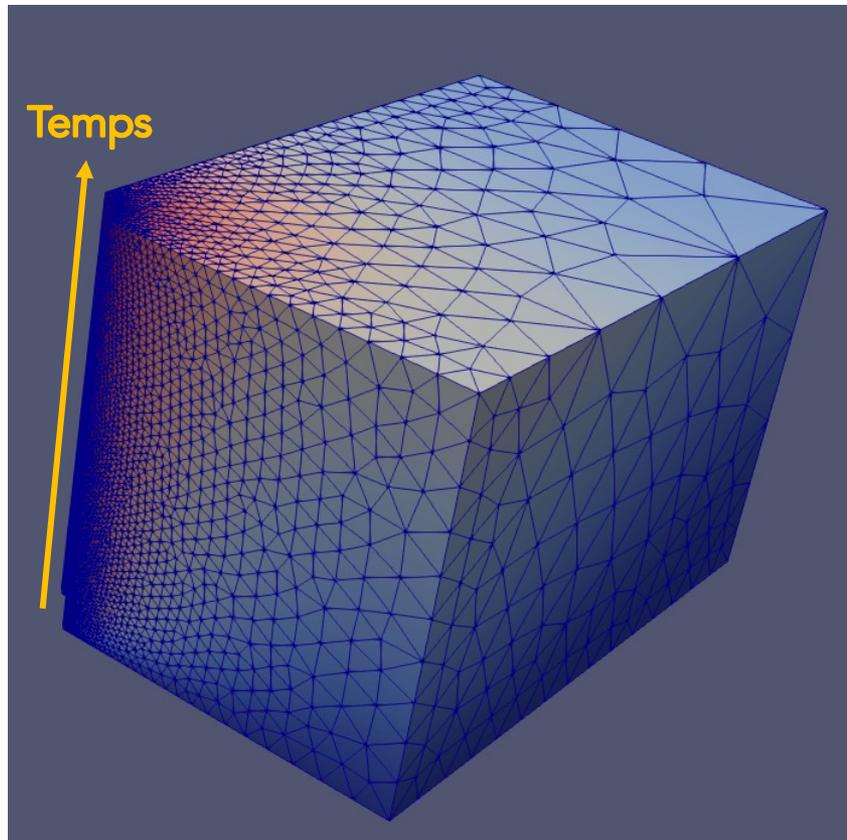
Projection sur le temps :

$$\sigma : \mathbf{d} - \rho \dot{\psi} = 0 \quad \leftarrow \quad \vec{u} \cdot \nabla \cdot \mathbf{T} = 0$$

PFD :

$$\nabla \cdot \sigma = \rho \vec{a} \quad \leftarrow \quad \partial_{x^0} (\mathcal{U}u^i) + \partial_{x^j} (\mathcal{U}u^i u^j) - \partial_{x^j} \sigma^{ij} = 0$$

Plaque trouée soumise à une variation de température



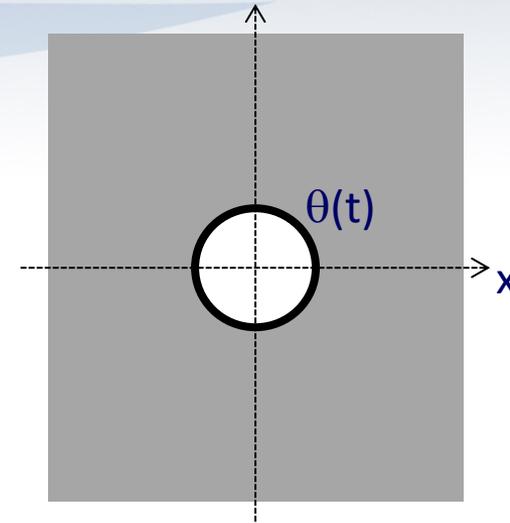
Conservation du tenseur
moment énergie 4D T $\nabla \cdot T = 0$

Forme variationnelle et Fenics

$$\int_{\Omega} T : \nabla v \, d\Omega = \int_V T n v \, dV$$

- Ω : the 4D volume
- V : the 3D boundary of Ω
- n : the outer normal on V
- v : trial function

$$\tilde{T} \begin{pmatrix} E & q_x & q_y & q_z \\ q_x & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ q_y & \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ q_z & \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$



$\theta(0) = 20^\circ \text{ C}$
ambiante

$\theta(t_f) = 30^\circ \text{ C}$

