Intégrabilité algébrique discrète

Avec Andy Hone et John Roberts

Pol Vanhaecke

Université de Poitiers

Réunion annuelle du GDR GDM
29 juin 2022

Quelques relations de récurrence intégrables

Point de départ : classification par Gubbiotti et al. (2020)

- 12 récurrences non-linéaires d'ordre 4
- $w_{n+4} = \mathcal{R}(w_n, w_{n+1}, w_{n+2}, w_{n+3})$; $n \geqslant 0$; $\mathcal{R}$ rationnelle
- Possèdent 2 invariants polynomiaux indépendants I_1, I_2
- Conditions sur les degrés $\mathtt{deg}_{w_j} I_k$ des invariants

Quelques relations de récurrence intégrables

Point de départ : classification par Gubbiotti et al. (2020)

- 12 récurrences non-linéaires d'ordre 4
- $w_{n+4} = \mathcal{R}(w_n, w_{n+1}, w_{n+2}, w_{n+3})$; $n \geqslant 0$; $\mathcal{R}$ rationnelle
- Possèdent 2 invariants polynomiaux indépendants I_1, I_2
- Conditions sur les degrés $\deg_{w_j} I_k$ des invariants

Récurrence $\mathcal{R}$ d'ordre 4 $\Rightarrow$ application rationnelle $\Phi : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$

$$\Phi : (w_0, w_1, w_2, w_3) \mapsto (w_1, w_2, w_3, \mathcal{R}(w_0, w_1, w_2, w_3))$$

En termes de Φ, l'invariance de I_k :

$$I_k \circ \Phi = I_k$$

Trois cas Liouville intégrables

Toujours dans Gubbiotti et al.

- 3 cas, (P.iv), (P.v) et (P.vi) admettent une formulation lagrangienne discrète
- Ceci amène à une structure de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}$ sur $\mathbb{C}^4$
- $\{\cdot\,,\cdot\}$ est rationnelle et de rang 4
- $\Phi : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ est un morphisme de Poisson
- I_1 et I_2 sont en involution, $\{I_1, I_2\} = 0$

Trois cas Liouville intégrables

Toujours dans Gubbiotti et al.

- 3 cas, (P.iv), (P.v) et (P.vi) admettent une formulation lagrangienne discrète
- Ceci amène à une structure de Poisson $\{\cdot\,,\cdot\}$ sur $\mathbb{C}^4$
- $\{\cdot\,,\cdot\}$ est rationnelle et de rang 4
- $\Phi : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ est un morphisme de Poisson
- I_1 et I_2 sont en involution, $\{I_1, I_2\} = 0$

Ce sont donc des systèmes Liouville intégrables discrets

(P.iv) et sa structure de Poisson

$$\begin{aligned} w_{n+4}w_{n+3}w_{n+2} &+ w_{n+2}w_{n+1}w_n + 2w_{n+2}^2(w_{n+3}+w_{n+1}) \\ &+ w_{n+2}(w_{n+3}^2 + w_{n+3}w_{n+1} + w_{n+1}^2) + w_{n+2}^3 \\ &+ \nu w_{n+2}(w_{n+3}+w_{n+2}+w_{n+1}) + bw_{n+2} + a = 0 \end{aligned}$$

Les crochets non nuls :

$$\{w_0, w_2\} = \frac{1}{w_1}\ , \qquad \{w_1, w_3\} = \frac{1}{w_2}\ ,$$

$$\{w_0, w_3\} = -\frac{w_0 + 2w_1 + 2w_2 + w_3 + \nu}{w_1 w_2}\ .$$

Les invariants de (P.iv)

$$I_1 = w_1 w_2 \Big(w_2 w_3 + w_0 w_1 - w_0 w_3 + (w_1 + w_2)^2 + \nu (w_1 + w_2) + b \Big) + a(w_1 + w_2)$$

$$I_2 = w_1 w_2 P(w_0, w_1, w_2, w_3) + a \left(w_0 w_1 + w_2 w_3 + (w_1 + w_2)^2 \right)$$

où

$$\begin{aligned} P = {} & w_0^2 w_1 + w_3^2 w_2 + w_0 w_3 (w_1 + w_2) + w_0 (w_2^2 + 2 w_1^2) + w_3 (w_1^2 + 2 w_2^2) \\ & + 3 (w_0 + w_3) w_1 w_2 + (w_1 + w_2)^3 + b \left(w_0 + w_1 + w_2 + w_3 \right) \\ & + \nu \left(w_0 w_3 + (w_0 + w_3)(w_1 + w_2) + (w_1 + w_2)^2 \right) \end{aligned}$$

Orbites dans des tores de Liouville

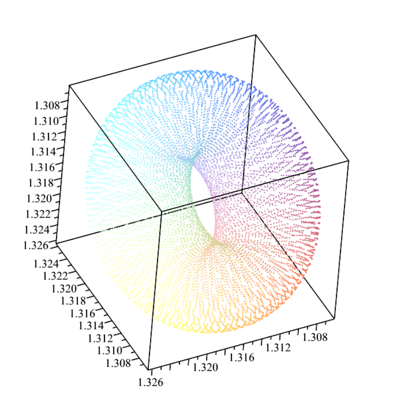

Figure: 10000 points de l'orbite de (P.iv) avec valeurs initiales $(\frac{21}{16}, \frac{21}{16}, \frac{452}{343}, \frac{3124}{2373})$ et paramètres $a = -9$, $b = 29$, $\nu = -10$.

Orbites dans des tores de Liouville

Explication :

- Au système discret est associé un système continu réel :
- Les invariants engendrent deux champs de vecteurs $\mathcal{X}_{I_1} := \{\cdot\,, I_1\}$ et $\mathcal{X}_{I_2} := \{\cdot\,, I_2\}$
- I_1 et I_2 sont des intégrales premières indépendantes
- $\{I_1, I_2\} = 0$
- Le système continu est donc Liouville intégrable
- Les variétés invariantes *compactes* sont des tores de dimension 2 sur lesquels $\mathcal{X}_{I_1}$ et $\mathcal{X}_{I_2}$ sont constants

Orbites dans des tores de Liouville

Explication :

- Au système discret est associé un système continu réel :
- Les invariants engendrent deux champs de vecteurs $\mathcal{X}_{I_1} := \{\cdot\,, I_1\}$ et $\mathcal{X}_{I_2} := \{\cdot\,, I_2\}$
- I_1 et I_2 sont des intégrales premières indépendantes
- $\{I_1, I_2\} = 0$
- Le système continu est donc Liouville intégrable
- Les variétés invariantes *compactes* sont des tores de dimension 2 sur lesquels $\mathcal{X}_{I_1}$ et $\mathcal{X}_{I_2}$ sont constants

De plus

- L'application Φ est de Poisson et préserve I_1 et I_2
- Donc Φ commute avec les champs $\mathcal{X}_{I_1}$ et $\mathcal{X}_{I_2}$
- Φ est alors une *translation* sur les tores de Liouville

Phénomène 1 : la propriété de Laurent

Pour les paramètres de (P.iv), fixons des valeurs entières, par exemple $\nu = 3$, $a = 5$, $b = 7$; avec les valeurs initiales toutes égales à 1 on obtient la suite

$$1, 1, 1, 1, -2 \cdot 3 \cdot 5, \frac{743}{2\cdot 3\cdot 5}, \frac{83\cdot 127}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 743}, \frac{2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 63659}{83\cdot 127\cdot 743}, -\frac{13\cdot 743\cdot 446753}{2\cdot 83\cdot 127\cdot 63659}$$

$$\frac{19\cdot 83\cdot 127\cdot 1579\cdot 20947}{2\cdot 13\cdot 63659\cdot 446753}, -\frac{2\cdot 59\cdot 51593\cdot 61837\cdot 63659}{13\cdot 19\cdot 1579\cdot 20947\cdot 446753}, -\frac{2^3\cdot 13\cdot 967\cdot 446753\cdot 6782004923}{19\cdot 59\cdot 1579\cdot 20947\cdot 51593\cdot 61837}, \ldots$$

Phénomène 1 : la propriété de Laurent

Pour les paramètres de (P.iv), fixons des valeurs entières, par exemple $\nu = 3$, $a = 5$, $b = 7$; avec les valeurs initiales toutes égales à 1 on obtient la suite

$$1, 1, 1, 1, -2 \cdot 3 \cdot 5, \frac{743}{2\cdot 3\cdot 5}, \frac{83\cdot 127}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 743}, \frac{2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 63659}{83\cdot 127\cdot 743}, -\frac{13\cdot 743\cdot 446753}{2\cdot 83\cdot 127\cdot 63659}$$

$$\frac{19\cdot 83\cdot 127\cdot 1579\cdot 20947}{2\cdot 13\cdot 63659\cdot 446753}, -\frac{2\cdot 59\cdot 51593\cdot 61837\cdot 63659}{13\cdot 19\cdot 1579\cdot 20947\cdot 446753}, -\frac{2^3\cdot 13\cdot 967\cdot 446753\cdot 6782004923}{19\cdot 59\cdot 1579\cdot 20947\cdot 51593\cdot 61837}, \ldots$$

Phénomène 1 : la propriété de Laurent

Pour les paramètres de (P.iv), fixons des valeurs entières, par exemple $\nu = 3$, $a = 5$, $b = 7$; avec les valeurs initiales toutes égales à 1 on obtient la suite

$$1, 1, 1, 1, -2\cdot 3\cdot 5, \frac{743}{2\cdot 3\cdot 5}, \frac{83\cdot 127}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 743}, \frac{2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 63659}{83\cdot 127\cdot 743}, -\frac{13\cdot 743\cdot 446753}{2\cdot 83\cdot 127\cdot 63659}$$

$$\frac{19\cdot 83\cdot 127\cdot 1579\cdot 20947}{2\cdot 13\cdot 63659\cdot 446753}, -\frac{2\cdot 59\cdot 51593\cdot 61837\cdot 63659}{13\cdot 19\cdot 1579\cdot 20947\cdot 446753}, -\frac{2^3\cdot 13\cdot 967\cdot 446753\cdot 6782004923}{19\cdot 59\cdot 1579\cdot 20947\cdot 51593\cdot 61837}, \ldots$$

Phénomène 1 : la propriété de Laurent

Pour les paramètres de (P.iv), fixons des valeurs entières, par exemple $\nu = 3$, $a = 5$, $b = 7$; avec les valeurs initiales toutes égales à 1 on obtient la suite

$$1, 1, 1, 1, -2 \cdot 3 \cdot 5, \frac{743}{2\cdot 3\cdot 5}, \frac{83\cdot 127}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 743}, \frac{2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 63659}{83\cdot 127\cdot 743}, -\frac{13\cdot 743\cdot 446753}{2\cdot 83\cdot 127\cdot 63659}$$

$$\frac{19\cdot 83\cdot 127\cdot 1579\cdot 20947}{2\cdot 13\cdot 63659\cdot 446753}, -\frac{2\cdot 59\cdot 51593\cdot 61837\cdot 63659}{13\cdot 19\cdot 1579\cdot 20947\cdot 446753}, -\frac{2^3\cdot 13\cdot 967\cdot 446753\cdot 6782004923}{19\cdot 59\cdot 1579\cdot 20947\cdot 51593\cdot 61837}, \ldots$$

Phénomène 1 : la propriété de Laurent

Pour les paramètres de (P.iv), fixons des valeurs entières, par exemple $\nu = 3$, $a = 5$, $b = 7$; avec les valeurs initiales toutes égales à 1 on obtient la suite

$$1, 1, 1, 1, -2 \cdot 3 \cdot 5, \frac{743}{2\cdot3\cdot5}, \frac{83\cdot127}{2\cdot3\cdot5\cdot743}, \frac{2^2\cdot3\cdot5\cdot63659}{83\cdot127\cdot743}, -\frac{13\cdot743\cdot{\color{red}446753}}{2\cdot83\cdot127\cdot63659}$$

$$\frac{19\cdot83\cdot127\cdot1579\cdot20947}{2\cdot13\cdot63659\cdot{\color{red}446753}}, -\frac{2\cdot59\cdot51593\cdot61837\cdot63659}{13\cdot19\cdot1579\cdot20947\cdot{\color{red}446753}}, -\frac{2^3\cdot13\cdot967\cdot{\color{red}446753}\cdot6782004923}{19\cdot59\cdot1579\cdot20947\cdot51593\cdot61837}, \ldots$$

Phénomène 1 : la propriété de Laurent

Pour les paramètres de (P.iv), fixons des valeurs entières, par exemple $\nu = 3$, $a = 5$, $b = 7$; avec les valeurs initiales toutes égales à 1 on obtient la suite

$$1, 1, 1, 1, -2 \cdot 3 \cdot 5, \frac{743}{2 \cdot 3 \cdot 5}, \frac{83 \cdot 127}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 743}, \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 63659}{83 \cdot 127 \cdot 743}, -\frac{13 \cdot 743 \cdot 446753}{2 \cdot 83 \cdot 127 \cdot 63659}$$

$$\frac{19 \cdot 83 \cdot 127 \cdot 1579 \cdot 20947}{2 \cdot 13 \cdot 63659 \cdot 446753}, -\frac{2 \cdot 59 \cdot 51593 \cdot 61837 \cdot 63659}{13 \cdot 19 \cdot 1579 \cdot 20947 \cdot 446753}, -\frac{2^3 \cdot 13 \cdot 967 \cdot 446753 \cdot 6782004923}{19 \cdot 59 \cdot 1579 \cdot 20947 \cdot 51593 \cdot 61837}, \ldots$$

Somos-4 et la propriété de Laurent

Somos-4 :

$$u_{n+4}u_n = u_{n+3}u_{n+1} + u_{n+2}^2$$

Si on prend les 4 valeurs initiales égales à 1 on obtient la suite

$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 23,\ 59,\ 314,\ 1529,\ 8209,\ 83313,\ 620297,\ \ldots$

Somos-4 et la propriété de Laurent

Somos-4 :

$$u_{n+4}u_n = u_{n+3}u_{n+1} + u_{n+2}^2$$

Si on prend les 4 valeurs initiales égales à 1 on obtient la suite

$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 23,\ 59,\ 314,\ 1529,\ 8209,\ 83313,\ 620297,\ \ldots$

Les termes de cette suite sont des entiers !

Somos-4 et la propriété de Laurent

Somos-4 :

$$u_{n+4}u_n = u_{n+3}u_{n+1} + u_{n+2}^2$$

Si on prend les 4 valeurs initiales égales à 1 on obtient la suite

1, 1, 1, 1, 2, 3, 7, 23, 59, 314, 1529, 8209, 83313, 620297, ...

Les termes de cette suite sont des entiers !

Explication – preuve (Gale 1991) :

$$u_n \in \mathbb{Z}\left[u_0^{\pm 1}, u_1^{\pm 1}, u_2^{\pm 1}, u_3^{\pm 1}\right] \tag{1}$$

Le dénominateur de chaque u_n est donc un monôme en les valeurs initiales u_0, u_1, u_2, u_3, donc vaut 1. De plus, chaque u_n est bien défini et fini.

La propriété (1) est appelée la propriété de Laurent.

Laurentification de (P.iv)

Le motif $\ldots, p, p^{-1}, p^{-1}, p, \ldots$ suggère la substitution

$$w_n = \frac{\tau_n \tau_{n+3}}{\tau_{n+1}\tau_{n+2}}$$

dans (P.iv), qui devient une récurrence d'ordre 7 de la forme

$$\tau_{n+7} = \frac{P(\tau_n, \ldots, \tau_{n+6})}{\tau_{n+2}^2 \tau_{n+3}^3 \tau_{n+4}^2}$$

et pour laquelle on peut montrer qu'elle possède la propriété de Laurent.

Corollaire :

- Pour des valeurs initiales $\neq 0$ chaque τ_n est bien défini et fini
- Pour des valeurs initiales génériques, chaque w_n est bien défini (confinement de singularités)
- Ceci explique le motif observé

Phénomène 2 : Une courbe algébrique apparaît

On prend des valeurs intiales arbitraires dans (P.iv), avec ε petit :

$$w_0 = Z \;, \quad w_1 = X \;, \quad w_2 = Y/X \;, \quad w_3 = \varepsilon \;.$$

Substitué dans $I_1(w_0, w_1, w_2, w_3) = c_1$ et $I_2(w_0, w_1, w_2, w_3) = c_2$ on trouve deux polynômes en X, Y, Z, puis en éliminant Z et faisant $\varepsilon \to 0$, on trouve une courbe algébrique affine *complexe* :

$$\big(aY^2 - (\nu c_1 + c_2)Y - ac_1\big)X^4 + \big((a\nu - c_1)Y^2 + (a^2 - bc_1)Y + c_1^2\big)X^3 +$$
$$\big(2aY^3 + (ab - \nu c_1)Y^2 - 2ac_1 Y\big)X^2 + Y^2\big((a\nu - c_1)Y + a^2\big)X + aY^4 = 0$$

Phénomène 2 : Une courbe algébrique apparaît

Cette courbe est hyperelliptique : sous forme de Weierstrass elle prend la forme

$$y^2 = (1 + \nu x + bx^2)^2 + 4a(1 + \nu x + bx^2)x^3 + 4c_1 x^4 + 4(c_2 + \nu c_1)x^5$$

À noter

- La courbe est de genre 2
- Son terme dominant n'est pas constant
- Son terme constant l'est
- Elle passe par $(0, \pm 1)$ pour toutes valeurs c_1, c_2, a, b, ν
- Elle admet un unique point ∞ à l'infini
- Elle est lisse pour a, b, ν, c_1, c_2 génériques

Phénomène 3 : Solutions du réseau de Volterra infini

Pour $i = 1, 2$, le champ de vecteurs $\mathcal{X}_{I_1} := \{\cdot\,, I_1\}$ est donné par

$$\dot{w}_i = w_i(w_{i+1} - w_{i-1}) \qquad (i = 1, 2)$$

La récurrence produit alors des solutions du réseau de Volterra infini

$$\dot{w}_n = w_n(w_{n+1} - w_{n-1}) \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

- On fixe $w_0^{(0)}, w_1^{(0)}, w_2^{(0)}, w_3^{(0)}$
- Le flot de $\mathcal{X}_{I_1}$ donne une solution $(w_0(t), w_1(t), w_2(t), w_3(t))$ avec $w_i(0) = w_i^{(0)}$ pour $i = 0, 1, 2, 3$
- La récurrence permet de définir $w_n(t)$ pour $n \in \mathbb{N}$, puis $n \in \mathbb{Z}$
- Par l'invariance $w_i \mapsto w_{i+1}$ les $w_n(t)$ vérifient (2)

Réductions algébriquement intégrables du réseau de Volterra infini

Deux classes de réductions bien connues (Kac-van Moerbeke) du réseau de Volterra

$$\dot{w}_n = w_n(w_{n+1} - w_{n-1}) \qquad n \in \mathbb{Z}$$

- On peut prendre $w_i = 0$ pour $i < 0$ et $i > N$; on parle du réseau de KM non-périodique (à N particules)
- On peut prendre $w_{i+N} = w_i$ pour tout i ; on parle du réseau de KM périodique (à N particules)
- Dans les deux cas, les réductions sont algébriquement intégrables (au sens large)
- Quid alors de (P.iv) ?

Systèmes Liouville intégrables complexes

$(M, \Pi, \mathbf{F})$ où

- M est une variété algébrique complexe, ici $\mathbb{C}^n$
- Π est une structure de Poisson algébrique, ici rationnelle
- $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_s)$ fonctions algébriques, ici polynomiales

Comme dans le cas réel, Liouville intégrable veut dire que

- $\mathbf{F}$ en involution
- $\mathbf{F}$ indépendant
- $s = \dim M - \frac{1}{2} Rk \{\cdot\, , \cdot\}$

Systèmes a.c.i. (Adler-van Moerbeke)

$(M, \{\cdot\,,\cdot\}\,, \mathbf{F})$ système Liouville intégrable complexe. Dire qu'il est algébriquement complètement intégrable (a.c.i.) signifie

- Pour c générique, $\mathbf{F}^{-1}(c)$ est une partie affine d'une variété abélienne $\mathbb{C}^r/\Lambda_c$
- Les champs de vecteurs holomorphes $\mathcal{X}_{F_i}$ sont constants (invariants par translation) sur ces $\mathbb{C}^r/\Lambda_c$

Systèmes a.c.i. (Adler-van Moerbeke)

$(M, \{\cdot\,,\cdot\}\,, \mathbf{F})$ système Liouville intégrable complexe. Dire qu'il est algébriquement complètement intégrable (a.c.i.) signifie

- Pour c générique, $\mathbf{F}^{-1}(c)$ est une partie affine d'une variété abélienne $\mathbb{C}^r/\Lambda_c$
- Les champs de vecteurs holomorphes $\mathcal{X}_{F_i}$ sont constants (invariants par translation) sur ces $\mathbb{C}^r/\Lambda_c$

L'exemple principal de variété abélienne : La jacobienne d'une courbe algébrique lisse Γ de genre g est $\mathrm{Jac}(\Gamma) := \frac{\mathrm{Div}^0\,\Gamma}{\sim}$ où

$$\mathrm{Div}^0\,\Gamma := \left\{ \sum_{P\in\Gamma} c_P P \mid c_P \in \mathbb{Z}\,, \sum_{P\in\Gamma} c_P = 0 \right\}$$

$P_1 - Q_1 + \cdots + P_k - Q_k \sim 0$ ssi $\exists f$ avec $\left\{ \begin{array}{ll} (f)_0 & = P_1 + \cdots + P_k \\ (f)_\infty & = Q_1 + \cdots + Q_k \end{array} \right.$

On a $\dim \mathrm{Jac}(\Gamma) = g$, le genre de Γ.

Exemple de système a.c.i. : Le système de Mumford

L'espace de phases est l'espace affine M_g des matrices 2×2

$$L(x) = \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix}$$

- $u(x)$ est unitaire de degré g
- $v(x)$ est de degré au plus $g-1$
- $w(x)$ est unitaire de degré $g+1$

Structure de Poisson linéaire (venant d'un R-crochet)

L'application moment

$$\mathbf{F} : L(x) \in M_g \mapsto -\det L(x) = u(x)w(x) + v^2(x) \in \mathbb{C}[x]$$

A.c.i. : pour $f(x) = x^{2g+1} + \cdots$ sans racines multiples, $y^2 = f(x)$ est une courbe hyperelliptique lisse de genre g et

$$\mathbf{F}^{-1}(f(x)) = \mathrm{Jac}(y^2 = f(x)) \setminus \Theta$$

Un variant du système de Mumford

L'espace de phases est l'espace affine M_g des matrices 2×2

$$L(x) = \begin{pmatrix} P(x) & R(x) \\ Q(x) & -P(x) \end{pmatrix}$$

- $P(x)$ est de degré au plus g ; $P(0) = 1$
- $Q(x)$ est de degré au plus g ; $Q(0) = 2$
- $R(x)$ est de degré au plus $g + 1$; $R(0) = 0$

Même application moment

$$\mathbf{F} : L(x) \mapsto -\det L(x) = Q(x)R(x) + P^2(x)$$

A.c.i. : pour $f(x) = 1 + \cdots + c_{2g+1}x^{2g+1}$ sans racines multiples, $y^2 = f(x)$ est une courbe hyperelliptique lisse de genre g et

$$\mathbf{F}^{-1}(f(x)) = \mathrm{Jac}(y^2 = f(x)) \setminus (\Theta \cup \Theta_+ \cup \Theta_-)$$

Systèmes a.c.i. $\Rightarrow$ Systèmes a.c.i. discrets

$(M, \{\cdot\,,\cdot\}, \Phi, \mathbf{I})$ système Liouville intégrable complexe discret :

- $(M, \{\cdot\,,\cdot\})$ variété de Poisson algébrique
- $\Phi : M \to M$ birationnelle, de Poisson
- $\mathbf{I} = (I_1, \ldots, I_s)$ invariants de Φ, indépendants, en involution
- $s = \dim M - \frac{1}{2} Rk\,\{\cdot\,,\cdot\}$

Systèmes a.c.i. $\Rightarrow$ Systèmes a.c.i. discrets

$(M, \{\cdot\,,\cdot\}\,, \Phi, \mathbf{I})$ système Liouville intégrable complexe discret :

- $(M, \{\cdot\,,\cdot\})$ variété de Poisson algébrique
- $\Phi : M \to M$ birationnelle, de Poisson
- $\mathbf{I} = (I_1, \dots, I_s)$ invariants de Φ, indépendants, en involution
- $s = \dim M - \frac{1}{2} Rk\, \{\cdot\,,\cdot\}$

Algébriquement complètement intégrable (a.c.i.) signifie

- Pour c générique, $\mathbf{I}^{-1}(c)$ est une partie affine d'une variété abélienne $\mathbb{C}^r/\Lambda_c$
- Φ est une translation sur chacun de ces $\mathbb{C}^r/\Lambda_c$

Le variant du système de Mumford, en discret

L'idée :

- On garde du système continue
  - L'espace de phases M (2×2- matrices polynomiales)
  - La structure de Poisson sur M
  - Intégrales premières $\longrightarrow$ invariants ?
- On construit une application $\Phi : M \to M$
  - Sur chaque tore Φ doit être une translation
  - Translations sur jacobienne = addition d'un diviseur de degré 0
  - ? Un tel diviseur sur chaque jacobienne ?
  - Seules possibilités $T_{\pm} = [(0, \pm 1) - \infty]$ et $T = [(0, -1) - (0, 1)]$
  - $T_+ = -T_-$ et $T = 2T_-$ donc on prend T_- pour construire Φ
- On vérifie
  - Φ est birationnel
  - Φ admet les intégrales premières comme invariants
  - Φ est de Poisson

La construction de Φ

$$
\begin{tikzcd}
(P,Q,R) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[d, "{Q(x_i)=0}"', "{y_i=P(x_i)}"'] & & (\widetilde{P},\widetilde{Q},\widetilde{R}) \arrow[d, "{\widetilde{Q}(\tilde{x}_i)=0}", "{\tilde{y}_i=\widetilde{P}(x_i)}"] \\
\left[\sum^g (x_i,y_i) - g\infty\right] \arrow[rr, "{+\,[(0,-1)-\infty]}"'] & & \left[\sum^g (\tilde{x}_i,\tilde{y}_i) - g\infty\right]
\end{tikzcd}
$$

$$\widetilde{P}(x) = Q(x) - P(x) \qquad \widetilde{R}(x) = -wxQ(x)$$

$$\widetilde{Q}(x) = \frac{2P(x) - Q(x) + R(x)}{-wx}$$

avec

$$w = -\frac{2\,p_1 - q_1 + r_1}{2}$$

Une équation de Lax discrète pour Φ

$$L(x)M(x) = M(x)\widetilde{L}(x)$$

où

$$L(x) := \begin{pmatrix} P(x) & R(x) \\ Q(x) & -P(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M(x) := \begin{pmatrix} 1 & -wx \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Avec ces formules on vérifie

- Φ est birationnel
- Φ admet les intégrales premières comme invariants
- Φ est de Poisson

On a donc bien un système a.c.i. discret $(M_g, \{\cdot\,,\cdot\}\,, \Phi, \mathbf{I} = \mathbf{F})$

Construction alternative de Φ : fractions continuées

Les formules pour Φ

$$\widetilde{P}(x) = Q(x) - P(x) \qquad \widetilde{R}(x) = -wxQ(x)$$

$$\widetilde{Q}(x) = \frac{2P(x) - Q(x) + R(x)}{-wx}$$

s'écrivent alternativement comme une identité dans $\frac{\mathbb{C}[x,y]}{(y^2 - f(x))}$

$$\frac{y + P(x)}{Q(x)} = 1 - \frac{wx}{\frac{y+\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)}}$$

Construction alternative de Φ : fractions continuées

Les formules pour Φ

$$\widetilde{P}(x) = Q(x) - P(x) \qquad \widetilde{R}(x) = -wxQ(x)$$
$$\widetilde{Q}(x) = \frac{2P(x) - Q(x) + R(x)}{-wx}$$

s'écrivent alternativement comme une identité dans $\frac{\mathbb{C}[x,y]}{(y^2 - f(x))}$

$$\frac{y + P(x)}{Q(x)} = 1 - \frac{wx}{\frac{y + \widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)}}$$

ce qui nous amène pour (P, Q, R) générique à une fraction continuée

$$\frac{y + P(x)}{Q(x)} = 1 - \cfrac{w_0 x}{1 - \cfrac{w_1 x}{1 - \cfrac{w_2 x}{1 - \cdots}}} =: [w_0, w_1, w_2, \ldots]$$

Φ comme une récurrence

La fraction continuée produit une suite $w_0, w_1, w_2, \ldots$ dans $\mathbb{C}$,

$$\frac{y + P(x)}{Q(x)} = [w_0, w_1, w_2, \ldots]$$

où les w_i s'expriment en termes des coefficients de P, Q, R, et vice-versa. Précisement on a :

Proposition : Pour tout $g > 0$, la fraction continuée définit un isomorphisme birationnel entre M_g et $\mathbb{C}_w^{3g+1}$ ($\mathbb{C}^{3g+1}$ muni de coordonnées $w_0, \ldots, w_{3g}$).

$$\begin{tikzcd}
M_g \arrow[r, leftrightarrow, "\text{birat}"] \arrow[d, "\Phi"'] & \mathbb{C}_w^{3g+1} \arrow[d, "\substack{w_i \mapsto w_{i+1} \\ w_{3g} \mapsto \mathcal{R}(w_0, \ldots, w_{3g})}"] \\
M_g \arrow[r, leftrightarrow, "\text{birat}"] & \mathbb{C}_w^{3g+1}
\end{tikzcd}$$

Exemple : $g = 1$

Afin de simplifier les formules, on fixe la valeur du Casimir $F_1 = 2(p_1 + r_1) = c_1$. L'isomorphisme birationnel devient alors

$$
\begin{aligned}
P(x) &= 1 + (2w_1 + c_1/2)x \\
Q(x) &= 2(1 + (w_2 + w_1 + c_1/2)x) \\
R(x) &= -2w_1 x(1 + (w_1 + w_0 + c_1/2)x)
\end{aligned}
$$

et Φ devient une relation de récurrence d'ordre 3

$$w_2\left(w_3 + w_2 + \frac{c_1}{2}\right) = w_1\left(w_0 + w_1 + \frac{c_1}{2}\right)$$

Si on fixe aussi la valeur du Casimir $F_2 = p_1^2 + 2r_2 + q_1 r_1 = c_2$ l'ordre de la récurrence descend, elle devient

$$4w_1\left(w_2 + w_1 + w_0 + \frac{c_1}{2}\right) - \frac{c_1^2}{4} + c_2 = 0$$

Exemple : $g = 2$

On fixe maintenant les Casimirs $F_1 = c_1$, $F_2 = c_2$ et $F_3 = c_3$. L'isomorphisme birationnel devient

$$P(x) = 1 + (2w_1 + c_1/2)x + p_2 x^2$$
$$Q(x) = 2(1 + (w_2 + w_1 + c_1/2)x) + (p_2 + \tilde{p}_2)x^2$$

où

$$p_2 = 2w_1\left(\frac{c_1}{2} + w_0 + w_1 + w_2\right) + \frac{c_2}{2} - \frac{c_1^2}{8}$$

Φ devient la récurrence

$$\begin{aligned} w_{n+4}w_{n+3}w_{n+2} &+ w_{n+2}w_{n+1}w_n + 2w_{n+2}^2(w_{n+3} + w_{n+1}) \\ &+ w_{n+2}(w_{n+3}^2 + w_{n+3}w_{n+1} + w_{n+1}^2) + w_{n+2}^3 \\ &+ \nu w_{n+2}(w_{n+3} + w_{n+2} + w_{n+1}) + bw_{n+2} + a = 0 \end{aligned}$$

où

$$\nu = \frac{c_1}{2} \qquad b = \frac{c_2 - \nu^2}{2} \qquad a = \frac{2c_3 - c_1 - c_2 + c_1\nu^2}{8}$$

Exemple : $g = 2$

On fixe maintenant les Casimirs $F_1 = c_1$, $F_2 = c_2$ et $F_3 = c_3$. L'isomorphisme birationnel devient

$$P(x) = 1 + (2w_1 + c_1/2)x + p_2 x^2$$
$$Q(x) = 2(1 + (w_2 + w_1 + c_1/2)x) + (p_2 + \tilde{p}_2)x^2$$

où

$$p_2 = 2w_1\left(\frac{c_1}{2} + w_0 + w_1 + w_0\right) + \frac{c_2}{2} - \frac{c_1^2}{8}$$

Φ devient la récurrence (P.iv)

$$\begin{aligned} w_{n+4}w_{n+3}w_{n+2} &+ w_{n+2}w_{n+1}w_n + 2w_{n+2}^2(w_{n+3} + w_{n+1}) \\ &+ w_{n+2}(w_{n+3}^2 + w_{n+3}w_{n+1} + w_{n+1}^2) + w_{n+2}^3 \\ &+ \nu w_{n+2}(w_{n+3} + w_{n+2} + w_{n+1}) + bw_{n+2} + a = 0 \end{aligned}$$

où

$$\nu = \frac{c_1}{2} \qquad b = \frac{c_2 - \nu^2}{2} \qquad a = \frac{2c_3 - c_1 - c_2 + c_1\nu^2}{8}$$

Conclusion

- (P.iv) est Liouville intégrable discret (Gubbiotti et al.)
- (P.iv) se plonge dans un variant du système de Mumford
- Ce système est à la fois a.c.i. et a.c.i. discret
- Il en est alors de même pour pour (P.iv)
- (P.iv) est donc une translation sur des jacobiennes
- (P.iv) admet donc des solutions méromorphes, qui sont également des solutions du réseau de Volterra infini ($g = 2$)
- L'intégrabilité algébrique implique/explique également le confinement de singularités et l'apparation de la courbe algébrique de genre 2