De la loi de Hooke à l'équation d'Einstein

B. Kolev & R. Desmorat

Atelier MMC et relativité, 6 Juillet 2021

LIGNES DIRECTRICES

LIGNES DIRECTRICES

L'ESPACE ET LE TEMPS EN MÉCANIQUE CLASSIQUE

LA VISION GALILÉENNE DU MONDE RÉEL

- Chacun d'entre nous pense vivre, à chaque instant, dans un espace affine euclidien orienté de dimension 3 $(\mathscr{E}, \mathbf{q})$ et disposer d'un temps absolu.
- Chaque « observateur » peut ainsi consigner tout « évènement » par un quadruplet de nombres réels (t, x, y, z) qui localise celui-ci dans un référentiel de son choix.
- En mécanique classique, on postule qu'un changement d'observateur (référentiel) conduit à une transformation

$$(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) = (t + t_0, g(t)\mathbf{x}), \qquad g(t)\mathbf{x} = Q(t)\mathbf{x} + b(t),$$

où $g(t)$ est un déplacement de l'espace affine euclidien $(\mathscr{E}, \mathbf{q})$ dépendant du temps.

L'espace des configurations en MMC

Truesdell and Noll 1965

- Le body $\mathscr{B}$ est une variété à bord (compacte et orientable) de dimension 3, représentant la matière et munie d'une forme volume μ, la mesure de masse.
- Une configuration en MMC est un plongement $p : \mathscr{B} \to \mathscr{E}$ du body dans l'espace.
- L'espace des configurations est la variété (de dimension infinie) des plongements $\mathrm{Emb}(\mathscr{B}, \mathscr{E})$.

Notation

L'application linéaire tangente

$$Tp : T\mathscr{B} \to T\mathscr{E}, \qquad \text{(notée } \mathbf{F}\text{)},$$

est désignée en mécanique comme le gradient de la transformation.

ESPACE TANGENT

LE FIBRÉ TANGENT À LA VARIÉTÉ DES PLONGEMENTS

A chaque chemin de plongements $p(t)$ dans $\mathrm{Emb}(\mathscr{B},\mathscr{E})$ correspond un vecteur vitesse $\partial_t p$ dans $T\mathrm{Emb}(\mathscr{B},\mathscr{E})$, la vitesse lagrangienne et l'espace tangent au point p s'écrit

$$T_p\mathrm{Emb}(\mathscr{B},\mathscr{E}) := \{\boldsymbol{V}(\mathbf{X}) := \partial_t p(0,\mathbf{X});\ p(0) = p\}\,.$$

On introduit également :

- la vitesse eulerienne à droite sur $\Omega_p = p(\mathscr{B})$: $\boldsymbol{u}(t,\mathbf{x}) := (\boldsymbol{V}\circ p^{-1})(t,\mathbf{x})$,
- la vitesse eulerienne à gauche sur $\mathscr{B}$: $\boldsymbol{U}(t,\mathbf{X}) := (Tp^{-1}.\boldsymbol{V})(t,\mathbf{X})$.

$$\begin{tikzcd}
T\mathscr{B} \arrow[r, "Tp"] \arrow[d, "\pi"'] & T\mathscr{E} \arrow[d, "\pi"] \\
\mathscr{B} \arrow[r, "p"'] \arrow[ur, "\boldsymbol{V}"] \arrow[u, bend left, "\boldsymbol{U}"] & \mathscr{E} \arrow[u, bend right, "\boldsymbol{u}"']
\end{tikzcd}$$

Pull-back et push-forward

Passer des variables matérielles aux variables spatiales et inversement

- Elles généralisent les opérations suivantes sur les fonctions $f \in \mathrm{C}^\infty(\Omega_p, \mathbb{R})$ et $\mathscr{F} \in \mathrm{C}^\infty(\mathscr{B}, \mathbb{R})$:

$$p^*f = f \circ p \quad (\text{pull-back}), \qquad p_*\mathscr{F} = \mathscr{F} \circ p^{-1} \quad (\text{push-forward}).$$

- Pour les champs de vecteurs ($Tp = \mathbf{F}$ pour les mécaniciens) :

$$p^*\boldsymbol{u} = Tp^{-1} \circ \boldsymbol{u} \circ p \quad (\text{pull-back}), \qquad p_*\boldsymbol{U} = Tp \circ \boldsymbol{U} \circ p^{-1} \quad (\text{push-forward})$$

$$\begin{tikzcd}
T\mathscr{B} \arrow[r, "Tp"] \arrow[d, "\pi"] & T\mathscr{E} \arrow[d, "\pi"'] \\
\mathscr{B} \arrow[r, "p"] \arrow[u, bend left, "\boldsymbol{U}"] & \mathscr{E} \arrow[u, bend right, "\boldsymbol{u}"']
\end{tikzcd}$$

MASSE VOLUMIQUE ET MÉTRIQUE

A chaque plongement p correspond :

- par pull-back, une métrique riemannienne sur $\mathscr{B}$ de courbure nulle

$$\gamma = p^{*}\mathbf{q}\,;$$

- par push-forward, une mesure de masse sur $\Omega_p = p(\mathscr{B})$

$$p_{*}\mu = \rho\,\mathrm{vol}_q \implies \rho : \text{masse volumique sur } \Omega_p.$$

Les tenseurs de Cauchy–Green

Si on fixe une configuration de référence $p_0 : \mathscr{B} \to \Omega_0$, et on introduit la transformation $\varphi = p \circ p_0^{-1}$, on peut définir le tenseur de Cauchy–Green droit (sur $\Omega_0 = p_0(\mathscr{B})$)

$$\mathbf{C} := \varphi^* \mathbf{q} = \mathbf{F}_\varphi^\star \mathbf{q}\, \mathbf{F}_\varphi = \mathbf{q} \mathbf{F}_\varphi^t \mathbf{F}_\varphi,$$

et le tenseur de Cauchy–Green gauche (sur $\Omega_p = p(\mathscr{B})$)

$$\mathbf{b} := \varphi_* \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{F}_\varphi \mathbf{q}^{-1} \mathbf{F}_\varphi^\star = \mathbf{F}_\varphi \mathbf{F}_\varphi^t \mathbf{q}^{-1}.$$

Remarque

Ces tenseurs sont reliés à $\boldsymbol{\gamma} = p^* \mathbf{q}$ et $\boldsymbol{\gamma}_0 = p_0^* \mathbf{q}$ par

$$p_0^* \mathbf{C} = p_0^* \varphi^* \mathbf{q} = p^* \mathbf{q} = \boldsymbol{\gamma},$$

et

$$p^* \mathbf{b} = p^* \varphi_* \mathbf{q}^{-1} = p_0^* \mathbf{q}^{-1} = \boldsymbol{\gamma}_0^{-1}.$$

DÉFORMATIONS

- Le taux de déformation est traditionnellement définit par :

$$\widehat{\mathbf{d}} := \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^t\right)$$

  où $(\nabla \boldsymbol{u})^t$ est la transposée (par rapport à la métrique euclidienne $\mathbf{q}$) de l'opérateur linéaire $\mathbf{w} \mapsto \nabla_{\mathbf{w}} \boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{u}$ est la vitesse eulerienne.
- Sa version covariante $\mathbf{d} = \mathbf{q}\widehat{\mathbf{d}}$ (champ de tenseurs covariants d'ordre 2) s'écrit :

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\,\mathbf{q},$$

  où $\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}$ est la dérivée de Lie par rapport à $\boldsymbol{u}$.

Contraintes

Notion duale de celle des déformations

- Elles sont modélisées par un tenseur-distribution qui représente leur puissance virtuelle.
- L'exemple le plus simple est obtenu lorsque cette distribution possède une densité $\boldsymbol{\sigma}$, le tenseur des contraintes de Cauchy

$$\mathscr{P}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{\Omega_p} (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}) \operatorname{vol}_q .$$

- Par la formule du changement de variable avec $p^*(\rho \operatorname{vol}_q) = \mu$, cette puissance peut se réécrire sur le body :

$$\mathscr{P}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{\Omega_p} (\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}) \, \rho \operatorname{vol}_q = \int_{\mathscr{B}} (\boldsymbol{\theta} : p^* \boldsymbol{\varepsilon}) \, \mu .$$

où $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} / \rho$ est le tenseur de Kirchhoff et $\boldsymbol{\theta} = p^* \boldsymbol{\tau}$.

LA MÉTRIQUE COMME VARIABLE DE DÉFORMATION

LA MÉTRIQUE SUR LE BODY γ COMME PRIMITIVE DU TAUX DE DÉFORMATION

Théorème (Rougée, 2006)

Le long d'un chemin de plongements $p(t)$, la métrique riemannienne sur $\mathscr{B}$, $\boldsymbol{\gamma}(t) = p(t)^*\mathbf{q}$, satisfait l'équation d'évolution

$$\partial_t \gamma = 2p^* \mathbf{d},$$

où $\mathbf{d}$ *est le taux de déformation.*

Ce résultat résulte directement de la formule plus générale

$$\partial_t (p^* \mathbf{t}) = p^* \left(\partial_t \mathbf{t} + \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\, \mathbf{t}\right).$$

pour tout champ de tenseurs $\mathbf{t}$ définis sur Ω_p.

LIGNES DIRECTRICES

La variété des métriques Riemanniennes

ou l'ensemble des variables de déformation

- Met($\mathscr{B}$) est un ouvert convexe de l'espace vectoriel (de dimension infinie) des champs de tenseurs covariants d'ordre 2 sur $\mathscr{B}$.
- L'espace tangent $T_\gamma \mathrm{Met}(\mathscr{B})$ s'interprète comme l'espace des déformations virtuelles ε.
- L'espace cotangent $T^\star_\gamma \mathrm{Met}(\mathscr{B})$ s'interprète comme l'espace des puissances virtuelles des forces intérieures (avec ou sans densité).

La métrique de Rougée

Une métrique riemannienne sur la variété des métriques riemanniennes

- Rougée a introduit la métrique suivante sur Met($\mathscr{B}$) :

$$G^{\mu}_{\gamma}(\varepsilon^1, \varepsilon^2) := \int_{\mathscr{B}} \mathrm{tr}(\gamma^{-1}\varepsilon^1\gamma^{-1}\varepsilon^2)\,\mu, \qquad \varepsilon^1, \varepsilon^2 \in T_{\gamma}\mathrm{Met}(\mathscr{B});$$

- Cette métrique induit une application linéaire injective (mais pas surjective)

$$T_{\gamma}\mathrm{Met}(\mathscr{B}) \to T^{\star}_{\gamma}\mathrm{Met}(\mathscr{B}), \qquad \boldsymbol{\eta} \mapsto G^{\mu}_{\gamma}(\boldsymbol{\eta}, \cdot);$$

- L'image de cette application dans $T^{\star}_{\gamma}\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ correspond aux puissances à densité

$$\mathscr{P}_{\gamma}(\varepsilon) = \int_{\mathscr{B}} (\boldsymbol{\theta} : \varepsilon)\mu, \qquad \boldsymbol{\theta} = \gamma^{-1}\boldsymbol{\eta}\gamma^{-1}.$$

Lois de comportement élastique

- Une loi de comportement élastique (au sens de Cauchy) s'interprète (Rougée) comme un champ de vecteurs sur Met$(\mathscr{B})$: $\gamma \mapsto S(\gamma)$

$$\begin{tikzcd}
T\mathrm{Met}(\mathscr{B}) \arrow[r, "G^{\mu}"] \arrow[d, "\pi"] & T^{\star}\mathrm{Met}(\mathscr{B}) \\
\mathrm{Met}(\mathscr{B}) \arrow[u, bend left, "S"] \arrow[ur, "\theta=\gamma^{-1}S(\gamma)\gamma^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

- Les lois hyper-élastiques (élastiques au sens de Green) correspondent aux champs de vecteurs de type gradient (pour la métrique G^{μ})

$$S = \mathrm{grad}^{G^{\mu}} H, \qquad H \in \mathrm{C}^{\infty}(\mathrm{Met}(\mathscr{B}));$$

Exemple 1 : les fluides parfaits

- C'est un modèle de fluide (non visqueux) décrit par la loi de comportement
$$\boldsymbol{\sigma} = -P(\rho, T)\mathbf{q}^{-1}$$
où T est la température (fluide barotrope : $\boldsymbol{\sigma} = -P(\rho)\mathbf{q}^{-1}$).
- Elle correspond dans ce cadre géométrique à la fonctionnelle
$$H(\gamma) = \int_{\mathscr{B}} 2\psi(\ln \rho_{\gamma})\, \mu, \quad \text{où} \quad \mu = \rho_{\gamma}\mathrm{vol}_{\gamma}$$
où la dépendance possible de ψ à la température est implicite.
- En effet, $\delta\rho_{\gamma} = -\frac{1}{2}\rho_{\gamma}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon})$ et donc
$$d_{\gamma}H.\varepsilon = -\int_{\mathscr{B}} \psi'(\ln \rho_{\gamma})\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon})\,\mu = G^{\mu}_{\gamma}(S(\gamma), \varepsilon),$$
avec
$$S = \mathrm{grad}^{G^{\mu}} H = -\psi'(\ln \rho_{\gamma})\boldsymbol{\gamma}.$$
Soit $\boldsymbol{\theta} = \gamma^{-1}S(\gamma)\gamma^{-1} = -\psi'(\ln \rho_{\gamma})\,\gamma^{-1}$ puis, pour un fluide barotrope,
$$\boldsymbol{\sigma} = \rho p_{*}\boldsymbol{\theta} = -\rho\psi'(\ln \rho)\mathbf{q}^{-1}, \qquad P(\rho) = \rho\psi'(\ln \rho).$$

EXEMPLE 2 : LES GAZ PARFAITS

- C'est un modèle de fluide parfait décrit par la loi de comportement

$$\boldsymbol{\sigma} = -P(\rho, T)\mathbf{q}^{-1}, \qquad P(\rho, T) = \rho r T$$

où r est une constante et T est la température absolue.

- Elle correspond dans ce cadre géométrique au cas particulier de la formulation précédente où

$$\psi(\lambda) = k\lambda, \quad \text{avec} \quad k = rT.$$

EXEMPLE 3 : L'HYPER-ÉLASTICITÉ ISOTROPE

$$\text{Rappel :} \quad \boldsymbol{\theta} = \gamma^{-1} S(\gamma) \gamma^{-1}, \qquad S = \operatorname{grad}^{G^{\mu}} H$$

Théorème

Étant donnée une configuration de référence p_0 et $\gamma_0 = p_0^* \mathbf{q}$, l'hyper-élasticité locale se formule à partir de la fonctionnelle

$$H_{\gamma_0}(\gamma) = \int_{\mathscr{B}} 2\psi(I_1, I_2, I_3)\mu$$

définie sur $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$, où $I_k = \operatorname{tr}(\gamma_0^{-1}\gamma)^k$. On a

$$\boldsymbol{\theta} = \sum_{k=1}^{3} 2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_k}(\gamma) \right) \frac{\partial I_k}{\partial \gamma} = \sum_{k=1}^{3} 2k \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_k}(\gamma) \right) (\gamma_0^{-1}\gamma)^{k-1} \gamma_0^{-1}.$$

Lien avec la relativité générale

Passage au 4D

- En RG, la variable fondamentale est une métrique Lorentzienne g sur une variété-univers $\mathscr{U}$ de dimension 4 ;
- La contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ est remplacée par le tenseur énergie-impulsion $\mathbf{T}$ (qui décrit l'énergie-matière dans l'univers) ;
- $\mathbf{T}$ est relié à g par l'équation d'Einstein : $\mathbf{T} = g^{-1}S(g)g^{-1}$ où $S(g) = -\operatorname{grad}_g H$ est le gradient de la fonctionnelle de Hilbert

$$H(g) = \int_{\mathscr{U}} (aR_g + b)\mathrm{vol}_g$$

pour la métrique d'Ebin

$$G_g(\varepsilon^1, \varepsilon^2) := \int_{\mathscr{B}} \operatorname{tr}(g^{-1}\varepsilon^1 g^{-1}\varepsilon^2)\, \mathrm{vol}_g .$$

- Equation d'Einstein $\iff$ loi de comportement hyper-élastique.

Dérivation du tenseur d'Einstein

On calcule la variation de

$$H(g) = \int_{\mathscr{U}} (aR_g + b)\mathrm{vol}_g$$

- On utilise pour cela les variations

$$\delta \mathrm{vol}_g = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(g^{-1}\delta g)\mathrm{vol}_g, \qquad \delta R_g = -\,\mathrm{tr}(g^{-1}\mathbf{Ric}_g\, g^{-1}\delta g) + \mathrm{div}\, Y(\delta g)$$

- On en tire

$$\delta H = -\int_{\mathscr{U}} \mathrm{tr}\left[g^{-1}\left(a\,\mathbf{Ric}_g - \frac{1}{2}(aR_g + b)g\right)g^{-1}\delta g\right]\mathrm{vol}_g$$

- Soit

$$S(g) = a\,\mathbf{Ric}_g - \frac{1}{2}(a\,R_g + b)g, \qquad R_g = \mathrm{tr}(g^{-1}\mathbf{Ric}_g)$$

CONSÉQUENCE DE LA COVARIANCE GÉNÉRALE

- La fonctionnelle de Hilbert–Einstein est invariante par difféomorphisme (covariance générale)

$$H(\varphi^* g) = H(g), \qquad \forall \varphi \in \mathrm{Diff}(\mathscr{U})$$

- On en déduit que si $\varphi(t)$ est le flot d'un champ X, alors

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} H(\varphi(t)^* g) = dH.\mathscr{L}_X\, g = G_g(S(g), \mathscr{L}_X\, g) = 0, \quad \forall X$$

- Or

$$\mathscr{L}_X\, g = \left(\nabla X^\flat\right)^s := 2DX^\flat, \quad \mathrm{div}(\mathbf{T}\cdot Z) = \mathrm{div}(\mathbf{T})\cdot Z + \mathbf{T} : DZ$$

- D'où, par intégration par partie

$$\mathrm{div}\,\mathbf{T} = g^{-1}\,\mathrm{div}\,S(g) = 0, \qquad \text{“C'est la mécanique !” (Einstein)}$$

Illustration : fluides parfaits relativistes

Il s'agit d'un modèle de fluide 4D où la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ est remplacée par son équivalent 4D, le tenseur énergie-impulsion

$$\mathbf{T} := (\rho c^2 + P + e)\frac{\boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{U}}{c^2} - P g^{-1},$$

où :

- e est la densité d'énergie interne du fluide.
- c est la vitesse de la lumière.
- $\boldsymbol{U}$ est la quadri-vitesse du fluide.
- g est une métrique Lorentzienne.

Remarque

$\operatorname{div} \mathbf{T} = 0$ implique la conservation de la masse et les 3 équations fondamentales de la dynamique (dans l'approximation galiléenne).

LIGNES DIRECTRICES

Fibrés vectoriels et sections

un langage adapté pour bien définir les concepts en MMC

- Un fibré vectoriel $\mathbb{E}$ de base M et de fibre type E est une union d'espaces vectoriels, indexée par une variété M

$$\mathbb{E} = \bigsqcup_{x \in M} E_x,$$

possédant une structure différentiable et qui s'écrit localement $M \times E$

- Une section s de $\mathbb{E}$ est une application (lisse) $s : M \to \mathbb{E}$ telle que

$$s(x) \in E_x, \qquad \forall x \in M$$

Exemple : si $\mathbb{E} = TM$ (fibré tangent à M), s est un champ de vecteurs.

- Une section le long d'une courbe $x(t) \in M$ est une application (lisse) $t \mapsto s(t)$ telle que

$$s(t) \in E_{x(t)}, \qquad \forall t$$

Champs de tenseurs matériels

ou champs de tenseurs définis le long d'un chemin de plongements

Soit $\Gamma(\Omega, \mathbb{T})$ l'espace des champs de tenseurs de type $\mathbb{T}$ définis sur $\Omega \subset \mathscr{E}$.

Définition

Un champ de tenseurs matériel $\mathscr{F}_{\widetilde{p}}$ est une section (le long du chemin $\widetilde{p} := (p(t))$) du fibré vectoriel

$$\mathbb{E} = \bigsqcup_p E_p, \qquad E_p := \Gamma(\Omega_p, \mathbb{T}) \quad \Omega_p = p(\mathscr{B})$$

défini au dessus de $\mathrm{Emb}(\mathscr{B}, \mathscr{E})$.

Remarque

Autrement dit, $\mathscr{F}_{\widetilde{p}} : t \mapsto \mathbf{t}(t) \in E_{p(t)}$, où $\mathbf{t}(t)$ est un champ de tenseurs défini sur $\Omega_{p(t)}$.
Exemple : le champ des vitesses euleriennes $t \mapsto \boldsymbol{u}(t)$, défini le long de $(p(t))$, est le champ $\boldsymbol{u}(t) = (\partial_t p(t)) \circ p(t)^{-1}$.

OBJECTIVITÉ

UNE PROPRIÉTÉ DE COVARIANCE D'UN CHAMP DE TENSEURS MATÉRIEL

Soit $\widetilde{\varphi} = (\varphi(t))$ un chemin de difféomorphismes de $\mathscr{E}$, $\widetilde{p}$, un chemin de placements et $\mathscr{F} : \widetilde{p} \mapsto \mathbf{t}_{\widetilde{p}}$, un champ de tenseurs matériel. On définit

$$(\widetilde{\varphi} \star \widetilde{p})(t) := \varphi(t) \circ p(t), \qquad (\widetilde{\varphi} \star \mathbf{t}_{\widetilde{p}})(t) := \varphi(t)_* \, \mathbf{t}_{\widetilde{p}}(t).$$

1. $\mathscr{F}$ est objectif si

$$\mathbf{t}_{\widetilde{g} \star \widetilde{p}} = \widetilde{g} \star \mathbf{t}_{\widetilde{p}}, \qquad \forall \widetilde{g} \in \mathrm{Isom}(\mathscr{E}, \mathbf{q}), \ \forall \widetilde{p}.$$

2. $\mathscr{F}$ est covariant général si

$$\mathbf{t}_{\widetilde{\varphi} \star \widetilde{p}} = \widetilde{\varphi} \star \mathbf{t}_{\widetilde{p}}, \qquad \forall \widetilde{\varphi} \in \mathrm{Diff}(\mathscr{E}), \ \forall \widetilde{p}.$$

Exemples et contre-exemples classiques

- La vitesse eulerienne $\boldsymbol{u}_{\widetilde{p}}$ et sa dérivée covariante $\nabla \boldsymbol{u}_{\widetilde{p}}$ ne sont pas objectives.
- Le taux de déformation $\widehat{\mathbf{d}} = (\nabla \boldsymbol{u}_{\widetilde{p}})^s$ est objectif (mais pas covariant général).
- Le pushforward de la mesure de masse $p(t)_* \mu$ est covariant général.

OBJECTIVITÉ DU TENSEUR DES CONTRAINTES

Théorème

Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}_{\widetilde{p}}$ correspondant à une loi de comportement élastique (au sens de Cauchy) est objectif.

Démonstration.

- Par définition
$$\boldsymbol{\sigma}_{p(t)} = \rho_{p(t)}\, \mathbf{q}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{p(t)} \mathbf{q}^{-1},$$
avec $\boldsymbol{\varepsilon}_{p(t)} = p(t)_* S(p(t)^* \mathbf{q})$, S étant un champ de vecteur sur Met($\mathscr{B}$).
- Or $(g(t) \circ p(t))^* \mathbf{q} = p(t)^* (g(t)^* \mathbf{q}) = p(t)^* \mathbf{q}$ (car $g(t)$ est une isométrie de $\mathbf{q}$).
- De plus $p(t)_* \mu = \rho_{p(t)} \mathrm{vol}_{\mathbf{q}}$ et $(g(t) \circ p(t))_* = g(t)_* p(t)_*$.
- On a donc
$$\boldsymbol{\sigma}_{g(t) \circ p(t)} = (g(t)_* \rho_{p(t)}) \mathbf{q}^{-1} (g(t)_* \boldsymbol{\varepsilon}_{p(t)}) \mathbf{q}^{-1} = g(t)_* \boldsymbol{\sigma}_{p(t)}.$$

□

Dérivées covariantes

ou comment dériver les sections d'un fibré vectoriel

Soit $\mathbb{E}$ un fibré vectoriel et $\Gamma(\mathbb{E})$ l'espace des sections (lisses) de $\mathbb{E}$.

- Une dérivée covariante sur $\mathbb{E}$ est un opérateur

$$(X,s) \mapsto \nabla_X s, \qquad X \in \mathrm{Vect}(M) = \Gamma(TM),\ s \in \Gamma(\mathbb{E})$$

  tel que

$$\nabla_{fX} s = f \nabla_X s, \qquad \nabla_X(fs) = df \otimes s + f \nabla_X s$$

  pour toute fonction lisse $f \in \mathrm{C}^\infty(M,\mathbb{R})$.

- Localement, une section s est représentée par une fonction vectorielle $s_U : U \subset M \to E$ et

$$(\nabla_X s)_U(x) = d_x s_U.X(x) + \Gamma_x(X(x), s_U(x)),$$

  Γ_x étant un opérateur bilinéaire de $T_xM \times E_x \to E_x$.

DÉRIVÉES MATÉRIELLES

Une dérivée matérielle permet de dériver les champs de tenseurs matériels.

Définition

Une dérivée matérielle est une dérivée covariante sur le fibré vectoriel

$$\mathbb{E} = \bigsqcup_p \Gamma(\Omega_p, \mathbb{T}) \to \mathrm{Emb}(\mathscr{B}, \mathscr{E}).$$

Remarque

C'est donc un opérateur linéaire

$$\mathbf{t}_{\widetilde{p}} \mapsto \frac{d_{\widetilde{p}}}{dt} \mathbf{t}_{\widetilde{p}}$$

qui satisfait la règle de Leibniz

$$\frac{d_{\widetilde{p}}}{dt}(f\mathbf{t}) = (\partial_t f)\mathbf{t} + f\frac{d_{\widetilde{p}}}{dt}(\mathbf{t}),$$

pour toute fonction numérique $f(t)$.

A CHAQUE TRIVIALISATION, UNE DÉRIVÉE COVARIANTE

Le fibré vectoriel $\mathbb{E} = \bigsqcup_p \Gamma(\Omega_p, \mathbb{T})$ possède 2 trivialisations naturelles.

1. La première

$$\Psi_1 : \mathbb{E} \to \mathrm{Emb}(\mathscr{B}, \mathscr{E}) \times \mathrm{C}^\infty(\mathscr{B}, \mathbb{T}), \qquad \mathbf{t}_p \mapsto (p, \mathbf{t}_p \circ p)$$

qui induit comme dérivée covariante la dérivée particulaire :

$$\dot{\mathbf{t}} := \partial_t \mathbf{t} + \nabla_{\boldsymbol{u}} \mathbf{t}.$$

2. La seconde ($\mathbb{T}(\mathscr{B})$ étant le fibré des tenseurs de type $\mathbb{T}$ sur $\mathscr{B}$)

$$\Psi_2 : \mathbb{E} \to \mathrm{Emb}(\mathscr{B}, \mathscr{E}) \times \Gamma(\mathbb{T}(\mathscr{B})), \qquad \mathbf{t}_p \mapsto (p, p^* \mathbf{t}_p),$$

qui induit comme dérivée covariante la dérivée d'Oldroyd :

$$\overset{\triangledown}{\mathbf{t}} := \partial_t \mathbf{t} + \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}} \mathbf{t}.$$

DÉRIVÉES MATÉRIELLES OBJECTIVES

Une dérivée matérielle $d_{\widetilde{p}}/dt$ est objective si elle transforme les grandeurs (sections) objectives en grandeurs (sections) objectives. Plus précisément :

Définition

1. elle est objective si

$$\frac{d_{\widetilde{g}\star\widetilde{p}}}{dt}(\widetilde{g}\star\mathbf{t}_{\widetilde{p}}) = \widetilde{g}\star\left(\frac{d_{\widetilde{p}}}{dt}\mathbf{t}_{\widetilde{p}}\right), \qquad \forall\widetilde{g}\in \mathrm{Isom}(\mathscr{E},\mathbf{q}),$$

2. elle est covariante générale si

$$\frac{d_{\widetilde{\varphi}\star\widetilde{p}}}{dt}(\widetilde{\varphi}\star\mathbf{t}_{\widetilde{p}}) = \widetilde{\varphi}\star\left(\frac{d_{\widetilde{p}}}{dt}\mathbf{t}_{\widetilde{p}}\right), \qquad \forall\widetilde{\varphi}\in \mathrm{Diff}(\mathscr{E}).$$

Exemple : la dérivée particulaire

Elle n'est pas objective.

- si $\bar{\boldsymbol{u}}$ est la vitesse eulerienne associée à $\widetilde{g} \star \widetilde{p} = (g(t) \circ p(t))$, alors

$$\bar{\boldsymbol{u}} = g_* \boldsymbol{u} + \mathbf{w}, \qquad \mathbf{w} := \partial_t g \circ g^{-1},$$

- D'où

$$\begin{aligned}
\frac{d_{\widetilde{g}\star\widetilde{p}}}{dt}(\widetilde{g}_* \mathbf{t}) &= \partial_t(g_* \mathbf{t}) + \nabla_{\bar{\boldsymbol{u}}}(g_* \mathbf{t}) \\
&= g_* \left(\partial_t \mathbf{t}\right) - \mathscr{L}_{\mathbf{w}}(g_* \mathbf{t}) + g_* \left(\nabla_{g^* \bar{\boldsymbol{u}}} \mathbf{t}\right) \\
&= g_* \left(\partial_t \mathbf{t} - \mathscr{L}_{g^* \mathbf{w}}\, \mathbf{t}\right) + g_* \left(\nabla_{\boldsymbol{u}} \mathbf{t} + \nabla_{g^* \mathbf{w}} \mathbf{t}\right) \\
&= g_* \left(\partial_t \mathbf{t} + \nabla_{\boldsymbol{u}} \mathbf{t} + \nabla_{g^* \mathbf{w}} \mathbf{t} - \mathscr{L}_{g^* \mathbf{w}}\, \mathbf{t}\right) \\
&\neq \widetilde{g}_* \left(\partial_t \mathbf{t} + \nabla_{\boldsymbol{u}} \mathbf{t}\right) = \widetilde{g}_* \left(\frac{d_{\widetilde{p}}\, \mathbf{t}}{dt}\right).
\end{aligned}$$

EXEMPLE : LA DÉRIVÉE D'OLDROYD

Elle est covariante générale.

- si $\bar{\boldsymbol{u}}$ est la vitesse eulerienne associée à $\widetilde{\varphi} \star \widetilde{p} = (\varphi(t) \circ p(t))$, alors

$$\bar{\boldsymbol{u}} = \varphi_* \boldsymbol{u} + \mathbf{w}, \qquad \mathbf{w} := \partial_t g \circ g^{-1},$$

- D'où

$$\begin{aligned} \frac{d_{\widetilde{\varphi}\star\widetilde{p}}}{dt}(\widetilde{\varphi}_* \mathbf{t}) &= \partial_t(\varphi_* \mathbf{t}) + \mathscr{L}_{\bar{\boldsymbol{u}}}(\varphi_* \mathbf{t}) \\ &= \varphi_*(\partial_t \mathbf{t}) - \mathscr{L}_{\mathbf{w}}(\varphi_* \mathbf{t}) + \mathscr{L}_{\varphi_* \boldsymbol{u}}(\varphi_* \mathbf{t}) + \mathscr{L}_{\mathbf{w}}(\varphi_* \mathbf{t}) \\ &= \varphi_* \left(\partial_t \mathbf{t} + \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}} \, \mathbf{t}\right) = \widetilde{\varphi}_* \left(\frac{d_{\widetilde{p}} \, \mathbf{t}}{dt}\right). \end{aligned}$$

Dérivées covariantes sur $T\mathrm{Met}(\mathscr{B})$

- La trivialisation $T\mathrm{Met}(\mathscr{B}) = \mathrm{Met}(\mathscr{B}) \times \Gamma(\mathscr{B}, S^2T^*\mathscr{B})$ induit la dérivée covariante canonique $D_t^0\varepsilon := \partial_t\varepsilon$ et toute dérivée covariante sur $T\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ s'écrit
$$D_t\varepsilon = \partial_t\varepsilon + \Gamma_\gamma(\partial_t\gamma, \varepsilon).$$
- La dérivée objective d'Oldroyd (sur les tenseurs covariants d'ordre 2) est reliée à la dérivée covariante canonique par :

$$\overset{\triangledown}{\mathbf{k}} := \partial_t\mathbf{k} + \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\,\mathbf{k} = p_*\left(\partial_t(p^*\mathbf{k})\right) = p_*\left(D_t^0(p^*\mathbf{k})\right)$$

Théorème

A chaque dérivée covariante sur $T\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ correspond une dérivée objective sur les champs de tenseurs covariants d'ordre 2 :

$$\frac{d_{\widetilde{p}}\,\mathbf{k}}{dt} := p_*\left(D_t(p^*\mathbf{k})\right).$$

DÉRIVÉES COVARIANTES SUR $T^{\star}\mathrm{Met}(\mathscr{B})$

- Cette définition s'étend aux champs de tenseurs distributions (puissances virtuelles), par la règle de Leibniz

$$(D_t\mathscr{P})(\varepsilon) = \partial_t(\mathscr{P}(\varepsilon)) - \mathscr{P}\,(D_t\varepsilon) \quad \forall \mathscr{P},\, \forall \varepsilon$$

- Lorsque $\mathscr{P}$ est une distribution à densité, c.à.d. lorsque

$$\mathscr{P}(\varepsilon) = \int_{\mathscr{B}} (\boldsymbol{\theta} : \varepsilon)\mu,$$

  on obtient

$$(D_t\mathscr{P})(\varepsilon) = \int_{\mathscr{B}} (\partial_t\boldsymbol{\theta} : \varepsilon - \boldsymbol{\theta} : \Gamma_{\gamma}(\gamma_t, \varepsilon))\,\mu.$$

- Celle-ci n'a aucune raison, *a priori*, d'être une distribution à densité.

Dérivées objectives des 2-tenseurs contravariants

- Si $D_t \mathscr{P}$ est une distribution à densité, on écrira

$$D_t \mathscr{P}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{\mathscr{B}} (D_t \boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\varepsilon})\, \mu.$$

- On dit alors que la dérivée covariante D préserve les distributions à densité.
- Sa densité $D_t \boldsymbol{\theta}$ est alors définie implicitement par la règle de Leibniz

$$D_t \boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\theta} : D_t \boldsymbol{\varepsilon} = \partial_t (\boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\varepsilon}) .$$

- Cela permet de définir une dérivée objective sur les champs de 2-tenseurs symétriques contravariants $\boldsymbol{\tau}$

$$\frac{d_{\widetilde{p}}\, \boldsymbol{\tau}}{dt} := p_* \left(D_t(p^* \boldsymbol{\tau})\right) .$$

Cas des dérivées covariantes locales

- Une dérivée covariante sur Met($\mathscr{B}$) est dite locale, si Γ ne dépend que du 0-jet de γ, γ_t et ε, autrement dit, si

$$\Gamma_{\gamma}(\gamma_t, \varepsilon)(\mathbf{X}) = \Upsilon_{\gamma(\mathbf{X})}(\gamma_t(\mathbf{X}), \varepsilon(\mathbf{X})).$$

- Dans ce cas, la dualité naturelle entre $S^2T_{\mathbf{X}}\mathscr{B}$ et $S^2T^{\star}_{\mathbf{X}}\mathscr{B}$ permet de définir l'adjoint de l'application linéaire

$$\varepsilon(\mathbf{X}) \mapsto \Gamma_{\gamma(\mathbf{X})}(\gamma_t(\mathbf{X}), \varepsilon(\mathbf{X})),$$

notée $\Gamma^{\star}_{\gamma}(\gamma_t, \boldsymbol{\theta})(\mathbf{X})$, et définie implicitement par

$$\Gamma^{\star}_{\gamma}(\gamma_t, \boldsymbol{\theta})(\mathbf{X}) : \varepsilon(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{X}) : \Gamma_{\gamma}(\gamma_t, \varepsilon)(\mathbf{X}).$$

- On a alors

$$D_t\boldsymbol{\theta} = \partial_t\boldsymbol{\theta} - \Gamma^{\star}_{\gamma}(\gamma_t, \boldsymbol{\theta}).$$

EXEMPLE : LA DÉRIVÉE DE ZAREMBA–JAUMANN

ROUGÉE 1997

Elle s'écrit ($\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}/\rho$ est le tenseur de Kirchhoff) :

$$\overset{\triangle}{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \widehat{\mathbf{w}}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\widehat{\mathbf{w}}^{\star}, \qquad \widehat{\mathbf{w}} = (\nabla \boldsymbol{u})^{a} = \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{u} - (\nabla \boldsymbol{u})^{t}\right).$$

Elle correspond à la dérivée covariante sur Met($\mathscr{B}$) :

$$D_t\varepsilon := \partial_t\varepsilon - \frac{1}{2}\left(\gamma_t\gamma^{-1}\varepsilon + \varepsilon\gamma^{-1}\gamma_t\right),$$

qui est la dérivée covariante riemannienne de la métrique G^{μ} et dont la courbure s'écrit

$$R(\gamma_s,\gamma_t)\varepsilon = \frac{1}{4}\gamma\left[\left[\gamma^{-1}\gamma_t,\gamma^{-1}\gamma_s\right],\gamma^{-1}\varepsilon\right],$$

$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \mathbf{ab} - \mathbf{ba}$ désignant le commutateur de deux tenseurs mixtes.

Formulation d'une réciproque

La formulation d'une réciproque est difficile dans le cadre général. Elle s'avère toutefois possible dans un cadre local défini comme suit.

- On rappelle la trivialisation du fibré vectoriel $\mathbb{E}$ des champs de tenseurs matériels covariants d'ordre 2

$$\Psi_2 : \mathbb{E} \to \mathrm{Emb}(\mathscr{B}, \mathscr{E}) \times \Gamma(S^2 T^* \mathscr{B}), \qquad \mathbf{k} \mapsto (p, \varepsilon = p^* \mathbf{k}),$$

- Toute dérivée covariante sur $\mathbb{E}$ s'écrit donc

$$D_t \varepsilon = \partial_t \varepsilon + \Gamma_p(p_t, \varepsilon).$$

- Une dérivée covariante sur $\mathbb{E}$ est dite locale si Γ dépend seulement des 1-jets de p et de p_t et du 0-jet de ε, autrement dit, si

$$\Gamma_p(p_t, \varepsilon)(\mathbf{X}) = \Upsilon_{(p(\mathbf{X}), \mathbf{F}(\mathbf{X}))}\left((\boldsymbol{V}(\mathbf{X}), \mathbf{F}_t(\mathbf{X})), \varepsilon(\mathbf{X})\right).$$

Un lemme sur les dérivées matérielles locales

Lemme

Soit D une dérivée covariante locale sur $\mathbb{E}$.

1. *Si D est covariante générale, alors, $\Gamma = 0$.*
2. *Si D est objective, alors*

$$\Gamma_p(p_t, \varepsilon)(\mathbf{X}) = \Upsilon_{\mathbf{F}(\mathbf{X})}\left((\mathbf{F}_t\mathbf{F}^{-1})^s(\mathbf{X}), \varepsilon(\mathbf{X})\right),$$

et pour toute rotation $Q \in \mathrm{SO}(3)$, on a

$$\Upsilon_{Q\mathbf{F}(\mathbf{X})}\left(Q(\mathbf{F}_t\mathbf{F}^{-1})^s(\mathbf{X})Q^{-1}, \varepsilon(\mathbf{X})\right) = \Upsilon_{\mathbf{F}(\mathbf{X})}\left((\mathbf{F}_t\mathbf{F}^{-1})^s(\mathbf{X}), \varepsilon(\mathbf{X})\right).$$

Corollaire

La dérivée objective d'Oldroyd est l'unique dérivée objective locale qui soit covariante générale.

UN THÉORÈME RÉCIPROQUE

Théorème

Soit

$$\frac{d_{\widetilde{p}}\,\mathbf{k}}{dt} = \overset{\triangledown}{\mathbf{k}} + \Gamma_p(p_t, \mathbf{k}),$$

une dérivée objective locale sur les champs de tenseurs $\mathbf{k}$*, covariants symétriques d'ordre 2.*

- *Il existe une dérivée covariante* D *sur* $T\mathrm{Met}(\mathscr{B})$*, telle que*

$$\frac{d_{\widetilde{p}}\,\mathbf{k}}{dt} := \widetilde{p}_* \left(D_t(\widetilde{p}^*\mathbf{k})\right).$$

- *Celle-ci induit sur* $T^\star\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ *une dérivée covariante qui préserve les distributions à densité et définit donc une dérivée objective sur les champs de tenseurs* $\boldsymbol{\tau}$*, symétriques contravariants d'ordre 2.*

LES DÉRIVÉES OBJECTIVES DE MARSDEN ET HUGHES

- Ils affirment dans leur livre de 1983 que toutes les dérivées objectives des champs de tenseurs d'ordre 2 correspondent à des dérivées de Lie (en jouant sur les indices de ces tenseurs)
- Plus précisément, ils formulent ainsi quatre dérivées objectives

$$
\begin{aligned}
\frac{d^1_{\tilde{p}}\boldsymbol{\tau}}{dt} &:= \partial_t\boldsymbol{\tau} + \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{\tau} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - (\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}(\nabla\boldsymbol{u})^{\star},\\
\frac{d^2_{\tilde{p}}\boldsymbol{\tau}}{dt} &:= \partial_t\boldsymbol{\tau} + \frac{1}{2}\left\{\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\tau}\mathbf{q})\mathbf{q}^{-1} + \mathbf{q}^{-1}\,\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}(\mathbf{q}\boldsymbol{\tau})\right\} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \widehat{\mathbf{w}}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\widehat{\mathbf{w}}^{\star},\\
\frac{d^3_{\tilde{p}}\boldsymbol{\tau}}{dt} &:= \partial_t\boldsymbol{\tau} + \mathbf{q}^{-1}\,\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}(\mathbf{q}\boldsymbol{\tau}\mathbf{q})\mathbf{q}^{-1} = \dot{\boldsymbol{\tau}} + (\nabla\boldsymbol{u})^{t}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}((\nabla\boldsymbol{u})^{t})^{\star},\\
\frac{d^4_{\tilde{p}}\boldsymbol{\tau}}{dt} &:= \rho\frac{d^1_{\tilde{p}}}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\rho}\right) = \dot{\boldsymbol{\tau}} - (\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}(\nabla\boldsymbol{u})^{\star} + (\operatorname{div}\boldsymbol{u})\boldsymbol{\tau},
\end{aligned}
$$

et affirment que toutes les autres en sont des combinaisons linéaires.

Toutes les dérivées objectives ne sont des dérivées de Lie

- Ces dérivées objectives correspondent aux derivées covariantes suivantes sur $T\mathrm{Met}(\mathscr{B})$:

$$
\begin{aligned}
D_t^1 \varepsilon &= \partial_t \varepsilon, \\
D_t^2 \varepsilon &= \partial_t \varepsilon - \frac{1}{2}\left(\gamma_t \gamma^{-1} \varepsilon + \varepsilon \gamma^{-1} \gamma_t\right), \\
D_t^3 \varepsilon &= \partial_t \varepsilon - \left(\gamma_t \gamma^{-1} \varepsilon + \varepsilon \gamma^{-1} \gamma_t\right), \\
D_t^4 \varepsilon &= \partial_t \varepsilon - \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\gamma^{-1} \gamma_t) \varepsilon.
\end{aligned}
$$

- Une dérivée covariante $D_t \varepsilon = \partial_t \varepsilon + \Gamma_\gamma(\gamma_t, \varepsilon)$ sur $T\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ est une combinaison linéaire de $D_t^1\varepsilon$, $D_t^2\varepsilon$, $D_t^3\varepsilon$, $D_t^4\varepsilon$, ssi il existe α, β tels que

$$
\Gamma_\gamma(\gamma_t, \varepsilon) = \alpha\left(\gamma_t \gamma^{-1} \varepsilon + \varepsilon \gamma^{-1} \gamma_t\right) + \beta \operatorname{tr}(\gamma^{-1} \gamma_t) \varepsilon.
$$

- Cette famille correspond en fait à celle formulée par Hill (1978).
- Ni la dérivée de Green-Naghdi (1965), ni celle de Fiala (2004) ne s'écrivent ainsi.

CONCLUSION

- Développement du cadre géométrique proposé : intérêt de formuler la Mécanique des Milieux Continus directement sur le body.
- La variété des métriques riemanniennes joue un rôle fondamental dans la formulation des lois de comportement. Elle facilite le passage avec le 4D et fait le lien avec la Relativité Générale.
- Toutes les dérivées objectives de la littérature (Oldroyd, Truesdell, Jaumann, Green-Naghdi, Fiala, ...) correspondent à des dérivées covariantes sur la variété des métriques riemanniennes.

Lectures complémentaires

C. Truesdell and W. Noll.
The Non-Linear Field Theories of Mechanics.
Springer-Verlag, Berlin, 1965.

P. Rougée.
Mécanique des grandes transformations.
Springer-Verlag, Berlin, 1997.

P. Rougée.
An intrinsic Lagrangian statement of constitutive laws in large strain.
Computers & Structures, 84(17-18) :1125–1133, June 2006.

B. Kolev & R. Desmorat.
An intrinsic geometric formulation of Hyper-elasticity, pressure potential and non-holonomic constraints.
https://arxiv.org/abs/2103.09521, Mars 2021.

B. Kolev & R. Desmorat.
Objective rates as covariant derivatives on the manifold of Riemannian metrics.
https://arxiv.org/abs/2106.01126, Juin 2021.