

Plan

- 1 Justifications d'une approche relativiste espace-temps
 - propriétés des modèles
 - problèmes de la MMC
 - détour historique
 - positionnement relativiste
- 2 Présentation de l'approche relativiste espace-temps utilisée
- 3 Quelques éléments physiques
- 4 Applications à des problématiques d'ingénierie
- 5 Conclusions et perspectives

Propriétés des modèles \mathcal{F}

- ① Devraient obligatoirement vérifier la causalité \Rightarrow les informations se propagent à vitesse finie, du passé vers le futur
La vitesse de groupe d'une quantité matérielle doit être plus petite que la vitesse de la lumière c .
- ② Devraient obligatoirement vérifier l'universalité (= frame-indifference)
= covariance des modèles par changement d'observateur \mathcal{O}
Pour un modèle \mathcal{F} dépendant de paramètres X

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \xrightarrow{\Lambda} & \mathcal{O}' \\ X' & = & \Lambda[X] \end{array} \quad (1)$$

$$\mathcal{F}'(X') = \mathcal{F}'(\Lambda[X]) = \Lambda[\mathcal{F}(X)] \quad (2)$$

- ③ Devraient obligatoirement être thermodynamiquement compatibles
L'énergie totale se conserve.
L'entropie d'un système fermé et adiabatique ne peut que croître.
- ④ Devraient être applicables à des transformations finies

Les problèmes de la MMC en grandes transformations

- Les problèmes d'ingénierie sont souvent traités dans le cadre de la Mécanique des Milieux Continus Newtonienne
- Pourquoi ne pas se satisfaire du traitement Newtonien des changements d'observateur (= objectivité, en MMC)?
 - 1 Les observateurs Newtoniens sont des solides rigides (avec un temps absolu)
→ confusion/équivalence entre changement d'observateur et invariance par superposition d'un mouvement de corps rigide
 - 2 Comment construire un modèle de comportement pour un observateur qui se déforme? qui plus est pour un observateur non nécessairement Galiléen
- Les problèmes cinématiques en grandes transformations
 - 1 Quel choix pour les dérivées objectives? (Jaumann, Green-Naghdi = polar, Oldroyd = Maxwell, Truesdell, Lie...)
 - 2 Comment choisir entre les formalismes Lagrangien, Eulérien ou convectif?
 - 3 Comment rendre indépendant le modèle de comportement de la configuration de référence?
 - 4 Quelle variable cinématique choisir pour une description donnée? réponse donnée habituellement: elles se valent toutes!?
 - 5 Comment éviter les incohérences des modèles? (intégrabilité et réversibilité des modèles hypo-élastiques...)

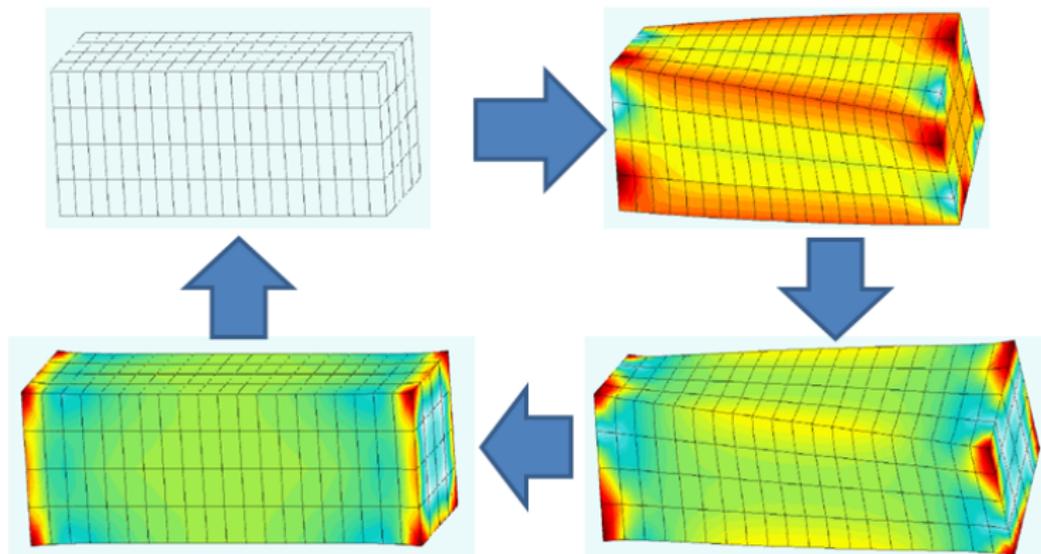
Traitement de l'hypoélasticité

Simulation for hypoelasticity

Parameters of material

λ (MPa)	μ (MPa)
150000	100000

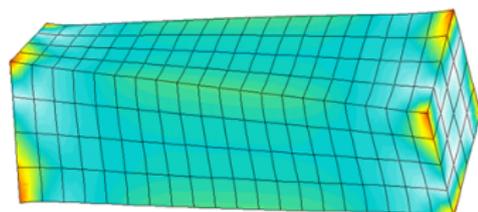
Steel 480



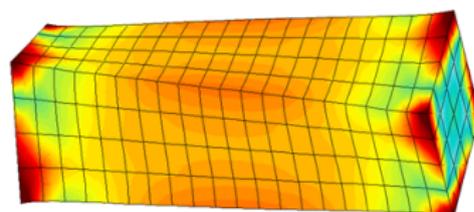
Traitement de l'hypoélasticité

Simulation of torsion and tensile, elastic models

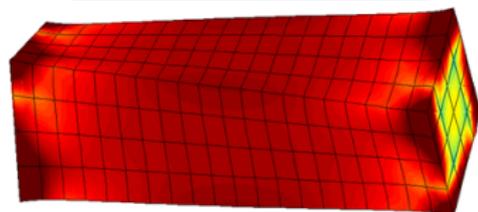
Torsion and tensile are fully loaded



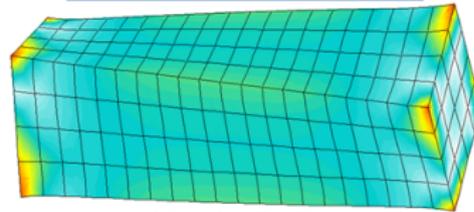
Reference elastic model



Irreversible Jaumann model



Irreversible Lie model



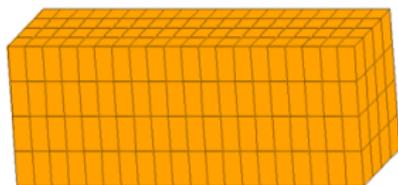
Reversible Lie model



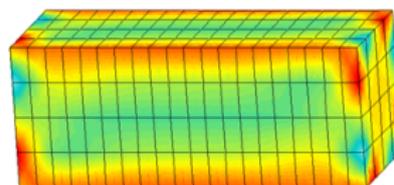
Traitement de l'hypoélasticité

Simulation of torsion and tensile, elastic models

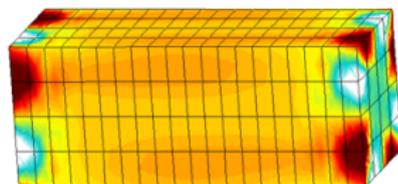
Bar is unloaded



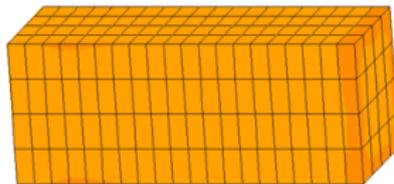
Reference elastic model



Irreversible Jaumann model



Irreversible Lie model



Reversible Lie model



⚠ Tous les modèles hypo-élastiques ne se valent pas

Détour historique

- Mise en évidence de la nature quadridimensionnelle de la mécanique en partant du principe de moindre action, en fonction des coordonnées Q^i , $Q^4 = ct$ et des impulsions $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^i}$, $p_4 = -\frac{H}{c}$

$$\delta \left(\int L dt \right) = 0 \Leftrightarrow \delta \left(\int \sum_{\mu=1}^4 p_{\mu} dQ^{\mu} \right) = 0 \quad (3)$$

où L est le Lagrangien et H le Hamiltonien

- Il existe déjà des théories qui vérifient causalité et universalité : ce sont les théories de la relativité espace-temps d'Einstein → **utilisons les !**
- Il existe de nombreux travaux sur des applications de la relativité à la MMC : Grot et Eringen [Eringen1966], Bressan [Bressan1978], Souriau [Souriau1983], De Saxcé [DeSaxce2012], Maugin [Maugin2013], Muschik [Muschik2014]...

De quelle relativité a-t-on besoin ?

Special Relativity

- Référentiels Galiléens
- Repères orthonormés (Lorentz)
- Pas de gravité
- Espace Euclidien
- Courbure = 0

- Référentiels non Galiléens
- Repères curvilignes
- Pas de gravité
- Espace Euclidien
- Courbure = 0

General Relativity

- Référentiels non Galiléens
- Repères curvilignes
- Gravitation
- Espace non Euclidien
- Courbure $\neq 0$

Plan

- 1 Justifications d'une approche relativiste espace-temps
- 2 Présentation de l'approche relativiste espace-temps utilisée
 - cadre de travail
 - observateurs
 - quadrivitesse
 - projecteurs
 - dérivées espace-temps
- 3 Quelques éléments physiques
- 4 Applications à des problématiques d'ingénierie
- 5 Conclusions et perspectives

Le choix d'un formalisme relativiste espace-temps

- On se place dans le cadre de la relativité sans gravitation (espace-temps de courbure 4D nulle $\Leftrightarrow G = 0$) et pour des changements d'observateurs quelconques (incluant des accélérations globales, des rotations globales et des déformations).
- Les coordonnées d'un évènement sont données par

$$x^\mu = (x^1, x^2, x^3, x^4) = (x^j, ct) \quad (4)$$

- On associe une métrique \mathbf{g} à l'espace-temps.
- Sans gravitation, l'espace-temps est plat de signature $(-1, -1, -1, +1)$
- Toutes les grandeurs tensorielles sont de dimension 4 et respectent par construction le principe de covariance

Définition et propriétés des observateurs

- Espace-temps tangent à la variété \mathcal{M} au point $M \rightarrow T_M(\mathcal{M})$
- Sous un changement du système de coordonnées tel que $x^\mu \rightarrow y^\nu (x^\mu)$, une base 4D se transforme comme $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \left(\frac{\partial x^\kappa}{\partial y^\nu} \right) \frac{\partial}{\partial x^\kappa} = \left(\frac{\partial}{\partial y^\nu} \right)$.
- On considère toutes les bases locales possibles telles que $\mathbf{g}_\mu = X_\mu^\nu(x) \frac{\partial}{\partial x^\nu}$; la matrice X_μ^ν doit être non singulière et appartient au groupe $GL(4, \mathbb{R})$
- Le groupe $\mathcal{M} \times GL(4, \mathbb{R})$ a naturellement la structure d'un fibré principal sur \mathcal{M} , nommé le fibré principal des observateurs.
- On définit un observateur \mathcal{O} comme un jeu de 4 quadri-vecteurs de base \mathbf{g}_μ
- Illustration du changement d'observateurs pour les composantes d'un tenseur (densité \mathcal{T} de poids W)

$$\tilde{\mathcal{T}}^{\mu\nu} = \left| \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \tilde{\xi}^\beta} \right|^W \frac{\partial \tilde{\xi}^\mu}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial \tilde{\xi}^\nu}{\partial \xi^\kappa} \mathcal{T}^{\lambda\kappa} \quad (5)$$

La quadrivitesse

- La quadrivitesse est définie par la tangente à la ligne d'univers :

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \quad (6)$$

$$\text{telle que } \|\mathbf{u}\| = g_{\mu\nu} u^\nu u^\mu = 1$$

$$\text{avec l'intervalle } ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

- Observateurs inertiels** : animés les uns par rapport aux autres d'un mouvement de translation rectiligne uniforme, donc à vitesse constante (mais pas nécessairement petite) ; cas Galiléen pour $v \ll c$
Pour un observateur inertiel (coord. ζ^μ et $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$), on a :

$$u^\mu = \frac{\gamma}{c} v^\mu = \left(\frac{\gamma}{c} \frac{dx^i}{dt}, \gamma \right) \quad (7)$$

$$\text{avec } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

- Observateurs propres** \hat{O} tels que :

$$\hat{u}^\mu = (0, 0, 0, 1) \quad (8)$$

Notion de projecteurs

Objectif : séparer proprement les différents phénomènes sur le temps et l'espace indépendamment de l'effet de mouvement de la matière

- Définition générale du projecteur temporel : u^μ
- Définition générale du projecteur spatial :

$$\underline{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu \quad (9)$$

- Application à un tenseur de rang 2

$$\underline{\mathcal{T}}_{\mu\nu} = \mathcal{T}^{\alpha\beta} \underline{g}_{\mu\alpha} \underline{g}_{\nu\beta} \quad (10)$$

Des dérivées utilisées en relativité

- Un choix plus restreint de dérivées utiles
- Généralisation du gradient, utilisant les symboles de Christoffel $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$

$$\nabla_{\lambda} \mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{T}^{\mu\nu}}{\partial \xi^{\lambda}} + \Gamma_{\kappa\lambda}^{\mu} \mathcal{T}^{\kappa\nu} + \Gamma_{\kappa\lambda}^{\nu} \mathcal{T}^{\mu\kappa} - W \Gamma_{\kappa\lambda}^{\kappa} \mathcal{T}^{\mu\nu} \quad (11)$$

- Généralisation de la dérivée matérielle = dérivée covariante

$$u^{\lambda} \nabla_{\lambda} \mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{d\mathcal{T}^{\mu\nu}}{ds} + u^{\lambda} (\Gamma_{\kappa\lambda}^{\mu} \mathcal{T}^{\kappa\nu} + \Gamma_{\kappa\lambda}^{\nu} \mathcal{T}^{\mu\kappa} - W \Gamma_{\kappa\lambda}^{\kappa} \mathcal{T}^{\mu\nu}) \quad (12)$$

- Dérivée de Lie dans le champ de quadrivitesse \mathbf{u}

$$\mathcal{L}_{\mathbf{u}}(\mathcal{T})^{\mu\nu} = u^{\lambda} \frac{\partial \mathcal{T}^{\mu\nu}}{\partial \xi^{\lambda}} - \mathcal{T}^{\lambda\nu} \frac{\partial u^{\mu}}{\partial \xi^{\lambda}} - \mathcal{T}^{\mu\lambda} \frac{\partial u^{\nu}}{\partial \xi^{\lambda}} + W \mathcal{T}^{\mu\nu} \frac{\partial u^{\lambda}}{\partial \xi^{\lambda}}. \quad (13)$$

Plan

- 1 Justifications d'une approche relativiste espace-temps
- 2 Présentation de l'approche relativiste espace-temps utilisée
- 3 Quelques éléments physiques
 - tenseur impulsion-énergie
 - lois de conservation
 - méthodologie générale
- 4 Applications à des problématiques d'ingénierie
- 5 Conclusions et perspectives

Définition du tenseur impulsion-énergie

Hypothèses physiques

- 1 pas de gravitation, pas de charge ni de courant imposé par des générateurs électriques, pas d'aimantation ni de polarisation spontanée
- 2 pas d'échange de molécules par diffusion (systèmes fermés et concentrations constantes des espèces chimiques)
- 3 pas de réaction chimique, nucléaire, pas de transformation de phases
- 4 pas de source volumique de chaleur \rightarrow rajoutée *a posteriori*
- 5 pas de discontinuité interne du milieu (pas de rupture, pas d'endommagement...)

Définition du tenseur impulsion-énergie

- On suppose qu'il existe un tenseur impulsion-énergie \mathbf{T} , tenseur de rang 2 symétrique décrivant le contenu énergétique de la matière en interaction avec son environnement
- On projette ce tenseur-impulsion énergie **sur le temps**, **sur le temps et l'espace**, et **sur l'espace**

$$\mathcal{U} = u_\alpha T^{\alpha\beta} u_\beta \quad (14a)$$

$$q^\mu = \underline{g}^\mu_\alpha T^{\alpha\beta} u_\beta \quad (14b)$$

$$T^\mu_\sigma = \underline{T}^{\mu\nu} = \underline{g}^\mu_\alpha T^{\alpha\beta} \underline{g}^\nu_\beta \quad (14c)$$

- Ce qui permet de décomposer de façon unique :

$$T^{\mu\nu} = T^\mu_{\mathcal{U}} + T^\mu_q + T^\mu_\sigma \quad (15)$$

$$= \mathcal{U} u^\mu u^\nu + q^\mu u^\nu + u^\mu q^\nu + T^\mu_\sigma \quad (16)$$

Interprétation du tenseur impulsion-énergie

Dans le repère propre : $\hat{u}^\mu = (0, 0, 0, 1)$,

$$\hat{T}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \hat{T}_\sigma^{11} & \hat{T}_\sigma^{12} & \hat{T}_\sigma^{13} & \hat{q}^1 \\ \hat{T}_\sigma^{12} & \hat{T}_\sigma^{22} & \hat{T}_\sigma^{23} & \hat{q}^2 \\ \hat{T}_\sigma^{13} & \hat{T}_\sigma^{23} & \hat{T}_\sigma^{33} & \hat{q}^3 \\ \hat{q}^1 & \hat{q}^2 & \hat{q}^3 & \hat{\mathcal{U}} \end{pmatrix} \quad (17)$$

Ce qui permet d'interpréter physiquement chaque composante dans ce repère 4D et de dénommer chaque terme :

- \mathcal{U} densité d'énergie totale telle que $\hat{\mathcal{U}} = \hat{\rho}_c c^2 = \hat{\tilde{\rho}}_c c^2 \left(1 + \frac{\epsilon_{int}}{c^2}\right)$
- q^μ flux d'énergie = flux de chaleur
- $T_\sigma^{\mu\nu} = \underline{T}^{\mu\nu}$ tenseur des contraintes à relier au comportement mécanique du matériau

Etablissement des lois de conservation et de bilan

- Soit un domaine espace-temps \mathcal{D} de frontière $\partial\mathcal{D}$
- **Conservation de la masse au repos** ($\tilde{\rho}_c$ masse volumique au repos, à énergie interne nulle)

$$\forall \Omega \subset \mathcal{D}, \nabla_\nu (\tilde{\rho}_c u^\nu) = 0 \quad (18)$$

- **Bilan de l'énergie totale et de la quantité de mouvement**

$$\forall \Omega \subset \mathcal{D}, \boxed{\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0} \quad (19)$$

- 1 Projection sur l'espace de la conservation de $\mathbf{T} \Rightarrow$ **principe fondamental de la dynamique**
- 2 Projection sur le temps de la conservation de $\mathbf{T} \Rightarrow$ **1er principe de la thermod.** = bilan d'énergie interne \Rightarrow équation de la chaleur

$$\forall \Omega \subset \mathcal{D}, u_\mu \nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$$

- **Bilan de l'entropie** (η entropie massique, θ température et Φ dissipation) = 2nd principe de la thermod

$$\forall \Omega \subset \mathcal{D}, \nabla_\nu \left(\tilde{\rho}_c \eta u^\nu + \frac{q^\nu}{\theta} \right) = \frac{\Phi}{\theta c} \geq 0 \quad (20)$$

Comment faire ensuite ?

Les grandes étapes de la démarche permettant d'être covariant et thermodynamiquement compatible

- Définition et interprétation du tenseur impulsion-énergie en relativité espace-temps
- Etablissement des lois de conservation et de bilan dans l'espace-temps
- Définition de la cinématique et plus généralement des variables d'états
- Obtention de l'inégalité de Clausius-Duhem avec la dérivée de Lie
- Construction des modèles de comportement et de dissipation en choisissant un potentiel énergétique
- Passage à la limite non-relativiste
- Comparaison avec les modèles Newtoniens en petites ou en grandes déformations

Plan

- 1 Justifications d'une approche relativiste espace-temps
- 2 Présentation de l'approche relativiste espace-temps utilisée
- 3 Quelques éléments physiques
- 4 Applications à des problématiques d'ingénierie**
 - outil pour la simulation
 - modèles mécaniques espace-temps
 - comparaisons avec les approches Newtoniennes
 - modèles thermiques espace-temps
 - application thermo(mécanique)
 - autres applications
- 5 Conclusions et perspectives

Implémentation Eléments Finis

- Implémentation dans FEniCS, <https://fenicsproject.org/>, proche de l'esprit et de l'écriture mathématiques
- Fenics permet d'écrire des formes variationnelles espace-temps

```
E = Constant(1e5)
nu = Constant(0.3)
model = "plane_stress"

mu = E/2/(1+nu)
lambda = E*nu/(1+nu)/(1-2*nu)
if model == "plane_stress":
    lambda = 2*mu*lambda/(lambda+2*mu)

def sigma(v):
    return lambda*tr(eps(v))*Identity(2) + 2.0*mu*eps(v)
```

```
rho_g = 1e-3
f = Constant((0, -rho_g))

V = VectorFunctionSpace(mesh, 'Lagrange', degree=2)
du = TrialFunction(V)
u_ = TestFunction(V)
a = inner(sigma(du), eps(u_))*dx
l = inner(f, u_)*dx
```

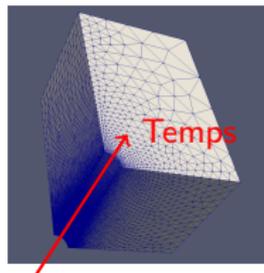
```
def left(x, on_boundary):
    return near(x[0], 0.)

bc = DirichletBC(V, Constant((0.,0.)), left)

u = Function(V, name="Displacement")
solve(a == l, u, bc)

plot(1e3*u, mode="displacement")
```

- FEniCS : maillage 3D → implémentation du problème 2D espace + 1D temps.



Construction des modèles de comportement en choisissant un potentiel énergétique

- On obtient le modèle d'hyperélasticité suivant, homogène et isotrope :

$$T_{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{(e_{\alpha\beta}\bar{g}^{\alpha\beta})^2}{2}\lambda\bar{g}^{\mu\nu} + (\bar{e}_{\alpha\beta}\bar{e}^{\alpha\beta})\mu\bar{g}^{\mu\nu} + \lambda(e_{\alpha\beta}\bar{g}^{\alpha\beta})(\bar{g}^{\mu\nu} - 2\bar{e}^{\mu\nu}) + 2\mu\bar{e}^{\mu\nu} - 4\mu\left(\bar{e}^{\mu}_{\beta}\bar{e}^{\beta\nu}\right)^{Sym} \quad (21)$$

$$= \lambda(e_{\alpha\beta}\bar{g}^{\alpha\beta})\left(\bar{g}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(e_{\alpha\beta}\bar{g}^{\alpha\beta})\bar{g}^{\mu\nu} - 2\bar{e}^{\mu\nu}\right) + 2\mu\left(\bar{e}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(e_{\alpha\beta}\bar{e}^{\alpha\beta})\bar{g}^{\mu\nu} - 2\left(\bar{e}^{\mu}_{\beta}\bar{e}^{\beta\nu}\right)^{Sym}\right) \quad (22)$$

- On regarde le comportement en petites déformations $\forall\mu, \nu, e^{\mu\nu} \ll 1$:

$$T_{\sigma}^{\mu\nu} \simeq \lambda(e_{\alpha\beta}\bar{g}^{\alpha\beta})\bar{g}^{\mu\nu} + 2\mu\bar{e}^{\mu\nu} \quad (23)$$

$$= \lambda(e_{\alpha}^{\beta}(\delta^{\alpha}_{\beta} - u^{\alpha}u_{\beta}))(\bar{g}^{\mu\nu} - u^{\mu}u^{\nu}) + 2\mu e^{\alpha\beta}(\delta^{\mu}_{\alpha} - u^{\mu}u_{\alpha})(\delta^{\nu}_{\beta} - u^{\nu}u_{\beta}) \quad (24)$$

Passage à la limite non-relativiste

- On traite le cas HPP pour un observateur inertiel

$$T_{\sigma}^{\mu\nu} = \lambda(e_{\alpha}^{\beta}(\delta^{\alpha}_{\beta} - \gamma^2 v^{\alpha} v_{\beta}/c^2))(\eta^{\mu\nu} - \gamma^2 v^{\mu} v^{\nu}/c^2) + 2\mu e^{\alpha\beta}(\delta^{\mu}_{\alpha} - \gamma^2 v^{\mu} v_{\alpha}/c^2)(\delta^{\nu}_{\beta} - \gamma^2 v^{\nu} v_{\beta}/c^2) \quad (25)$$

- On fait $v \ll c$ et $e_4^4 \propto$ vitesse de déformation/ $c \ll 1$, ce qui donne :

$$T_{\sigma}^{\mu\nu} \approx \lambda(e_{\alpha}^{\beta} \delta^{\alpha}_{\beta})\eta^{\mu\nu} + 2\mu e^{\mu\nu} \quad (26)$$

$$\approx \lambda(e_a^b \delta^a_b)\eta^{\mu\nu} + 2\mu e^{\mu\nu} \quad (27)$$

- Ou, on se place dans le cas d'un observateur propre ($\hat{\lambda} = J\lambda$ et $\hat{\mu} = J\mu$), d'où pour les composantes spatiales

$$\hat{T}_{\sigma}^{ij} = J\lambda(\hat{e}_a^b \delta^a_b + \hat{e}_4^4 - \hat{e}_4^{\beta} \hat{u}_{\beta})\hat{g}^{ij} + 2J\mu\hat{e}^{ij} \quad (28)$$

- On fait $\hat{e}_4^{\beta} \propto$ vitesse de déformation/ $c \ll 1$, ce qui donne :

$$\hat{T}_{\sigma}^{ij} \approx J\lambda(\hat{e}_a^b \delta^a_b)\hat{g}^{ij} + 2J\mu\hat{e}^{ij} \quad (29)$$

Comparaison avec les modèles Newtoniens en grandes déformations

- Modèle de Hooke Newtonien HPP avec la déformation infinitésimale ε (loi élastique)

$$T_{\sigma}^{ij} = \lambda(\varepsilon_a^b \delta_b^a)g^{ij} + 2\mu\varepsilon^{ij} \quad (30)$$

- Modèle de Hooke Newtonien en grandes déformations avec la déformation Eulérienne \mathbf{e} (loi élastique)

$$T_{\sigma}^{ij} = \lambda(e_a^b \delta_b^a)g^{ij} + 2\mu e^{ij} \quad (31)$$

- Modèle de Hooke Newtonien en grandes déformations avec la déformation Eulérienne \mathbf{e} (loi hyperélastique issue de la thermodynamique)

$$T_{\sigma}^{ij} = (\lambda(e_a^b \delta_b^a)g^{ik} + 2\mu e^{ik}) (\delta_k^j - 2e_k^j) \quad (32)$$

Comparaison avec les modèles Newtoniens en grandes déformations

- A partir de l'équation 22, on peut obtenir le modèle de Hooke espace-temps non-relativiste en grandes déformations

$$\hat{T}_{\sigma}^{ij}/J \approx \lambda(\hat{e}_a^b \delta^a_b) \hat{g}^{ij} + 2\mu \hat{e}^{ij} + \frac{1}{2} \lambda (\hat{e}_a^b \delta^a_b)^2 \hat{g}^{ij} + \mu (\hat{e}^{\alpha\beta} \hat{e}_{\alpha\beta}) \hat{g}^{ij} - 2\lambda (\hat{e}_a^b \delta^a_b) \hat{e}^{ij} - 4\mu (\hat{e}^{ia} \hat{e}_a^j)^{Sym} \quad (33)$$

- que l'on doit remettre dans le référentiel inertiel pour comparaison avec les modèles précédents, en obtenant T_{σ}^{ij}
- **Plusieurs non-linéarités**, ne dépendant que de 2 paramètres matériaux λ, μ

Comparaison avec les modèles Newtoniens en grandes déformations

- On considère le cas d'une extension uniaxiale uniforme avec une vitesse de déformation constante $\dot{\chi}$ (telle que $\dot{\chi}t = \chi - 1$) :

$$F_{\nu}^{\mu} \stackrel{\dot{\chi}X^1 \ll c}{\approx} \begin{pmatrix} \chi(t) & 0 & 0 & \frac{\dot{\chi}X^1}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (\chi + 1)\frac{\dot{\chi}X^1}{c} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (34)$$

- On considère le cas d'un glissement pur avec une vitesse de déformation constante $\dot{\chi}$ (telle que $\dot{\chi}t = \chi$) :

$$F_{\nu}^{\mu} \stackrel{\dot{\chi}X^2 \ll c}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & \chi(t) & 0 & \frac{\dot{\chi}X^2}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\dot{\chi}X^2}{c} & \frac{\dot{\chi}(X^1 + \chi X^2)}{c} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (35)$$

Comparaison avec les modèles Newtoniens en grandes déformations

Légende = HPP Newtonien ; élastique Newtonien ; hyperélastique Newtonien ; spacetime

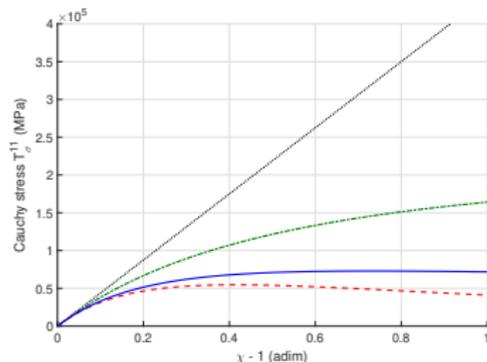


FIGURE – Composante 11, durant une extension uniaxiale, fonction de $\chi - 1$ pour différents modèles

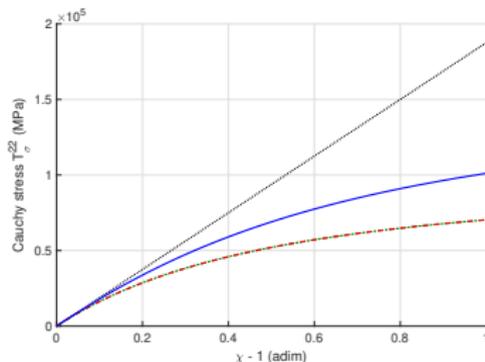


FIGURE – Composante 22, durant une extension uniaxiale, fonction de $\chi - 1$ pour différents modèles

Il existe des différences significatives entre modèles Newtoniens et espace-temps

Comparaison avec les modèles Newtoniens en grandes déformations

Légende = HPP Newtonien ; élastique Newtonien ; hyperélastique Newtonien ; spacetime

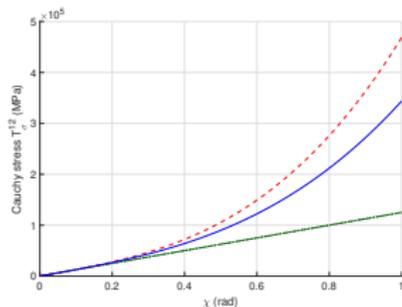


FIGURE – Composante 12 (cisaillement) fonction de χ pour différents modèles

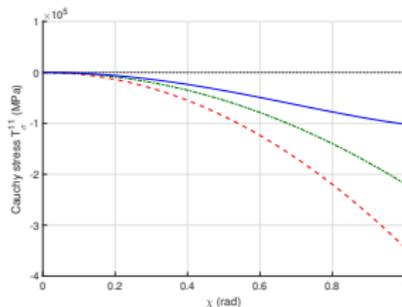
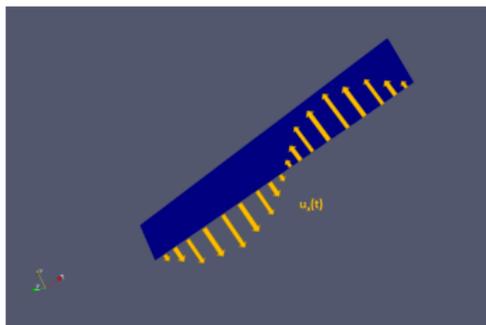


FIGURE – Composante 11, durant un glissement pur, fonction de χ pour différents modèles

Les tendances sont similaires, avec des valeurs numériques strictement différentes

Calculs EF espace-temps : sol. cyclique, avec FEniCS

- Sollicitation et CL ($x^1 = x; x^2 = y; x^0 = ct$) pour une barre



EF espace-temps avec FEniCS

- Initialement

$$\forall x, \forall y, dep^\mu(t = 0) = (dep^0, 0, 0)$$

- Spatialement (encastrement et sollicitation cyclique)

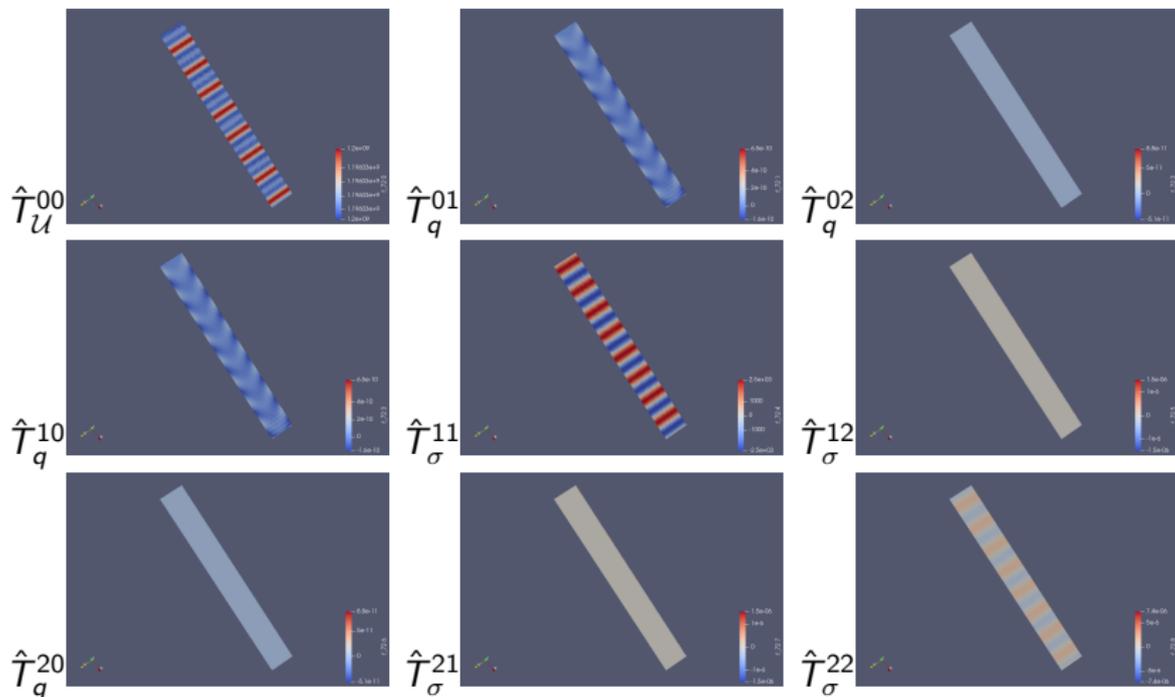
$$\forall t, \forall y, dep^\mu(x = 0) = (dep^0, 0, 0)$$

$$\forall t, \forall y, dep^1(x = L_x) = dep_{max} \sin(\omega t)$$

- avec $\omega = 2\pi \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$ et $dep_{max} = 10^{-2} \text{ m}$ (HPP)

Calculs EF espace-temps : soll. cyclique, avec FEniCS

Résultats pour le tenseur impulsion-énergie $T^{\mu\nu} \approx \hat{T}^{\mu\nu}$



Thermal behavior of materials

Thèse de Roula Al Nahas 2021

Assumptions on the developed thermal models

- mechanical stress is assumed to be null $\iff \hat{T}_\sigma^{\mu\nu} = 0$
 - purely thermal model, thermomechanical couplings are not taken into account
 - heat transfer by radiation is not taken into account
 - material coefficients are independent on space, time and temperature
 - we consider description at macroscopic scale and isotropic problems
-
- Spacetime Cattaneo's model of heat conduction obtained from complexification of Fourier's heat conduction in linear classical irreversible thermodynamics

$$\implies \boxed{q^\mu - \tau c u^\nu \nabla_\nu q^\mu = \frac{\lambda}{c} (g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu) (\nabla_\nu \theta - \tau_1 c u^\kappa \nabla_\kappa (\nabla_\nu \theta))} \quad (36)$$

Variational form with Cattaneo's model in spacetime relativity ($\tau_1 = 0$)

Assumptions for writing the variational forms

- problem written for an inertial and proper frame (other frames could be selected)
 - no acceleration term (\rightarrow medium at constant speed).
-
- Injection of q^ν in the equation of conservation of internal energy
 - Variational problem in Neumann-Dirichlet boundary conditions :

$$\begin{aligned}
 W(\theta, \theta^*) = & \int_{\Omega} \theta^* \frac{\partial \theta}{\partial t} dH_{\Omega} + \int_{\Omega} a^{ij} \frac{\partial \theta^*}{\partial x^i} \frac{\partial \theta}{\partial x^j} dH_{\Omega} + \int_{\Omega} \tau \frac{\partial \theta^*}{\partial t} \frac{\partial \theta}{\partial t} dH_{\Omega} - \int_{\Omega} \theta^* f_r dH_{\Omega} \\
 & - \int_{\partial\Omega_q} \theta^* \frac{c}{\rho c c_{m,\omega}} q_{\text{ext}}^j n_j dS_{\Omega} - \int_{\partial\Omega_q} \tau \theta^* \frac{\partial \theta}{\partial t} n_4 dV = 0, \forall \theta^* \quad (37)
 \end{aligned}$$

q_{ext}^j : surface heat flux in the proper frame imposed on the hypersurface $\partial\Omega_q$.

n_j : normal vector to the 3D surface.

a : thermal diffusivity of the material.

f_r : normalized volume heat source.

Ω : spacetime domain of integration.

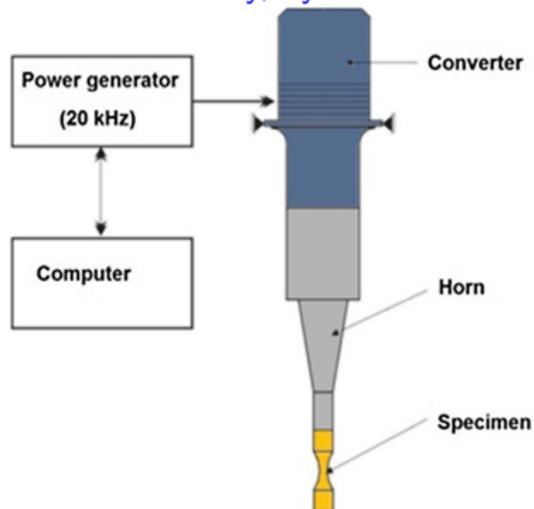
$dH_{\Omega} = dV_{\omega} dt$: corresponding spacetime hypervolume of integration.

dV_{ω} : 3D volume of integration.

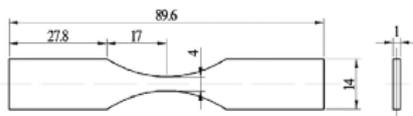
Elements for self-heating measurement

Thèse de Roula Al Nahas 2021 [AlNahas2021]

- Setup of the fatigue tests done at Paris-Nanterre University, by Johann Petit

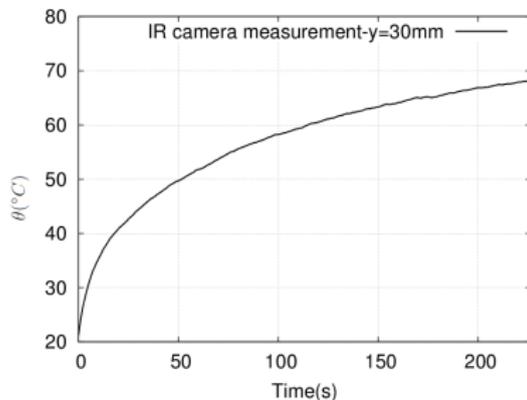
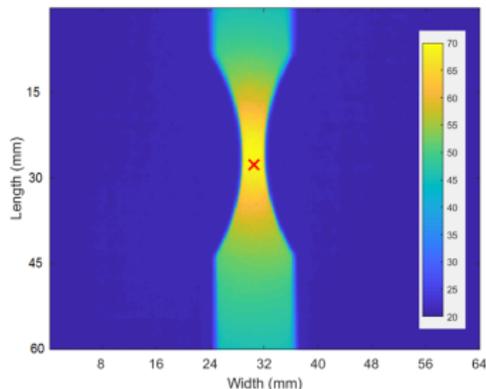


- Geometric dimensions of the C65 steel specimen



Elements for self-heating measurement

- Temperature can be measured using IR sensors



- Evolution of the measured specimen temperature $\theta(t)$ at a surface point located around its center as function of the time
- Need to identify the characteristic time τ_{ND} , and the heat source $f_r = \frac{d_1}{\tilde{\rho}_c C_{m\omega}}$
- 4 methods with calculation or optimization \rightarrow A or B with f_r , C with $f_r(t)$, D with $f_r(t, y)$

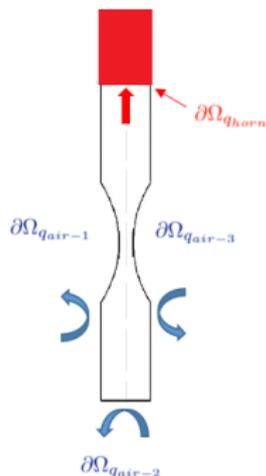
Variational problem in spacetime relativity for self-heating

$$\begin{aligned}
 W(\bar{\theta}_d, \theta^*) &= \int_{\Omega} \theta^* \frac{\partial \bar{\theta}_d}{\partial t} dH_{\Omega} + \int_{\Omega} a \frac{\partial \theta^*}{\partial y} \frac{\partial \bar{\theta}_d}{\partial y} dH_{\Omega} - \int_{\Omega} \theta^* f_r(x^\mu) dH_{\Omega} \\
 &+ \int_{\Omega} \theta^* \frac{\bar{\theta}_d}{\tau_{ND}} dH_{\Omega} + \int_{\partial\Omega_{q_{horn}}} \theta^* \frac{c q_{horn}^y(t)}{\tilde{\rho}_c \tilde{C}_{m\omega}} dS_{\Omega} \\
 &- \int_{\partial\Omega_{q_{air}}} \theta^* \frac{c q_{air}^y(t)}{\tilde{\rho}_c \tilde{C}_{m\omega}} dS_{\Omega} = 0, \forall \theta^*
 \end{aligned} \tag{38}$$

and $\forall y \in [0; L], \bar{\theta}_d(x^\mu \in \partial\Omega^4) = f_{TC}(y, t = 0) = 0$

and $\forall t \in [0; t_f], c q_{horn}^y(t) = 0$

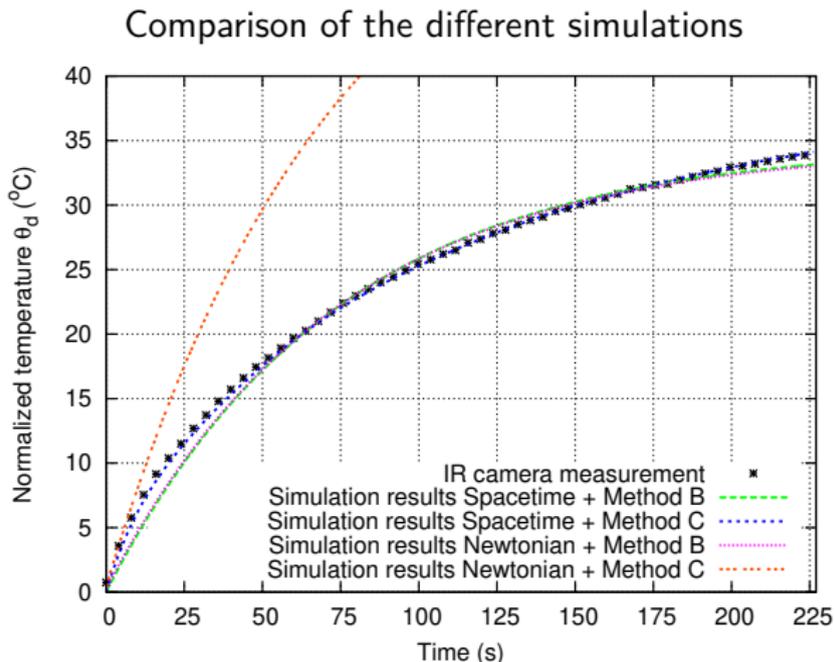
and $\forall t \in [0; t_f], c q_{air}^y(t) = h \bar{\theta}_d(y = L, t)$



Thermophysical properties of the considered C65 steel

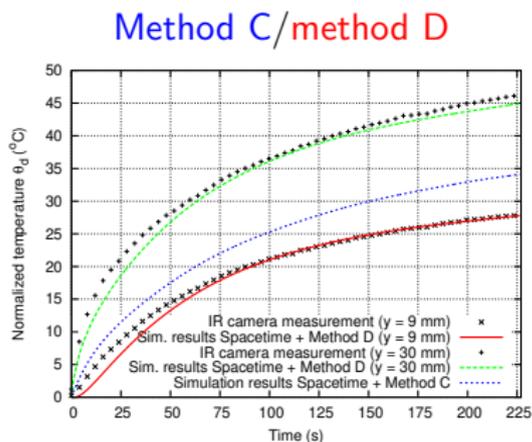
Variable	Value
Mass density $\tilde{\rho}_c$	$7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Specific heat capacity (constant volume) $C_{m\omega}$	$473 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Thermal diffusivity $a = \frac{\lambda}{\tilde{\rho}_c C_{m\omega}}$	$13.6 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Heat transfer coefficient for natural convection h	$15 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$

Simulation results : interest of the spacetime approach



Significant interest of spacetime approach when identified parameters depend on time

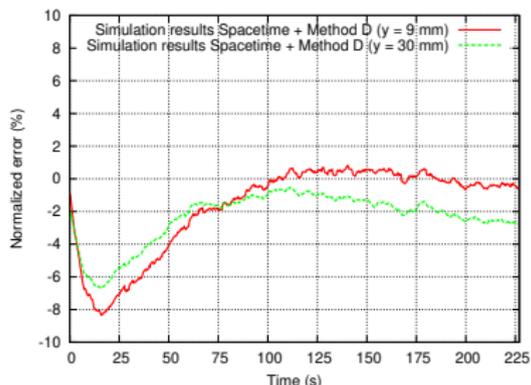
Simulation results : influence of the identification process with C and D methods



Better agreement with $\bar{\theta}_d(y, t)_{(exp)}$
 using meth. D

%relative error(y, t) =

$$100 \times \left(\frac{\bar{\theta}_d(y, t)_{(exp)} - \bar{\theta}_d(y, t)_{(simu)}}{\max(\bar{\theta}_d)_{(exp)}} \right)$$



Meth. D : % relative error on $\bar{\theta}_d(t)$
 $\leq 8.5\%$ and tends to 3%

Quelques autres approches traitées et modèles considérés

- Approche hyper-élastique espace-temps pour des comportements Neo-hookéens incompressibles → postdoc de K. Saliya
- Approche hypo-élastique espace-temps → master de O. Ameline et thèse de M. Wang
- Modèles de comportement de fluides viscoélastiques espace-temps → postdoc de G. Altmeyer [Altmeyer2016, Altmeyer2015]
- Modèles de comportement élastoplastiques espace-temps → thèse de M. Wang [Wang2016] à comparer par exemple au modèle de Sidoroff [Sidoroff1982]

3D • **Lie model with REP**

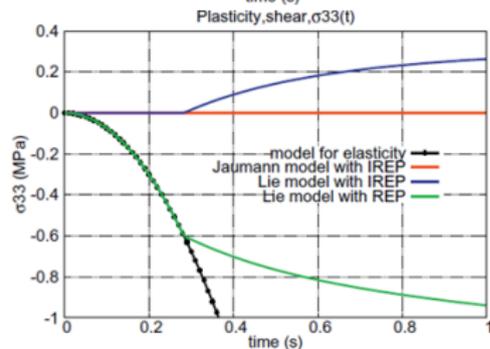
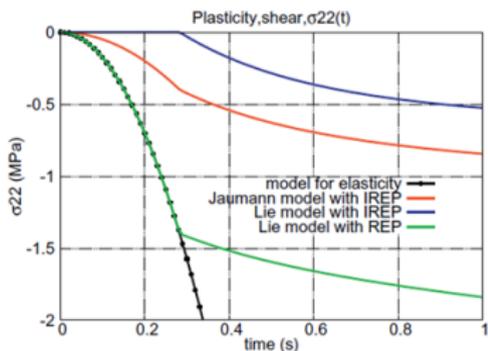
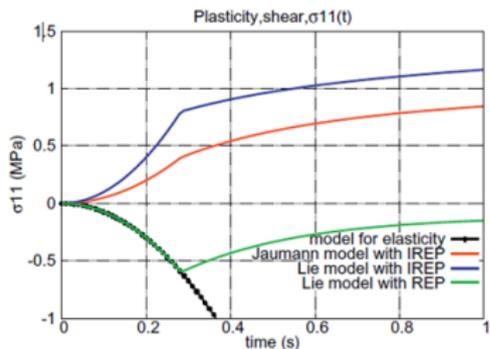
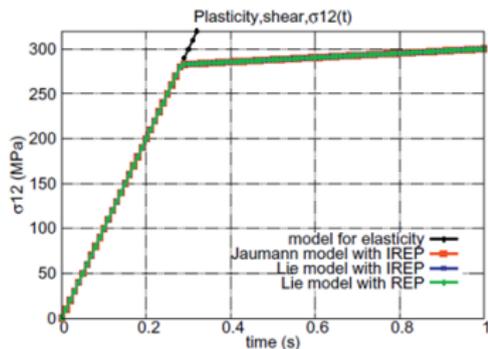
$$\mathcal{L}_{v_e}(\sigma^{ij}) = \xi_1 g^{ij} + \xi_2 d^{ij} + \sigma^{ij} d_m^m - 2(d^{ia} \sigma_a^j + d^{ja} \sigma_a^i) + 2\mu d^{ij} + \lambda \text{tr}(\mathbf{d}) g^{ij} \\ - (\xi_2 + 2\mu) M S^{ij} + 2M(S^{ia} \sigma_a^j + S^{ja} \sigma_a^i)$$

$$\xi_1(\lambda, \mu, \sigma^{ij}, S^{ij}, d_{ij}) \quad \xi_2(\lambda, \mu, \sigma^{ij}) \quad M(\xi_2, \sigma^{ij}, S^{ij}, d_{ij}, \frac{\partial \kappa}{\partial r})$$

• **Jaumann model with IREP**

$$\mathcal{F}^J(\sigma)^{ij} = 2\mu d^{ij} + \lambda \text{tr}(\mathbf{d}) g^{ij} - \frac{4\mu^2 S^{ab} d_{ab}}{\sigma_{eff}^2 (\frac{\partial \kappa}{\partial r} + 2\mu)} S^{ij}$$

Traitement de l'élastoplasticité



Plan

- 1 Justifications d'une approche relativiste espace-temps
- 2 Présentation de l'approche relativiste espace-temps utilisée
- 3 Quelques éléments physiques
- 4 Applications à des problématiques d'ingénierie
- 5 Conclusions et perspectives**

Conclusions et perspectives

- L'approche relativiste espace-temps permet d'obtenir un modèle nécessairement covariant
- et compatible thermodynamiquement, notamment par l'utilisation de la dérivée de Lie et des projecteurs
- L'approche relativiste espace-temps avec la thermodynamique permet de traiter naturellement les couplages multi-physiques, notamment dans les simulations numériques → thermomécanique
- L'approche relativiste espace-temps garantit physiquement les conservations (énergie...)
- **A traiter par la suite** : applications à des exemples de mécanique des fluides visqueux, application à des sollicitations dynamiques, application à des phénomènes ondulatoires, tests des effets d'accélération et de rotation, mise en place des modèles dépendants de la vitesse de déformation, prise en compte des phénomènes électromagnétiques, prise en compte de l'endommagement, faire le lien avec les approches statistiques (Boltzmann) justifiant des modèles de comportement macro...

Références



A. Bressan (1978) *Relativistic Theories of Materials*. Springer-Verlag, Berlin.



R.A. Grot, A.C. Eringen (1966) Relativistic continuum mechanics part I - mechanics and thermodynamics. *International Journal of Engineering Science* 4(6) :611-638.



J.M. Souriau (1983) Heat, cold and geometry (avec P. Iglesias). In *Differential geometry and mathematical physics*, volume 3 of *Math. Phys. Stud.*, pages 37–68. Reidel, Dordrecht.



G.A. Maugin (2013) *Continuum Mechanics Through the Twentieth Century, A Concise Historical Perspective*, Springer.



W. Muschik, H.H. Borzeszkowski (2014) Exploitation of the dissipation inequality in general relativistic continuum thermodynamics. *Archive of Applied Mechanics* 84 :1517-1531.



G. de Saxcé, C. Vallée (2012) Bargmann group, momentum tensor and Galilean invariance of Clausius–Duhem inequality, *International Journal of Engineering Science* 50 :216–232.



R. Al Nahas, J. Petit, A. Charles, E. Rouhaud, B. Panicaud (2021) On the use of a spacetime modeling for heat equation applied to self-heating computation with comparison to experimental results, *Heat and Mass Transfer*.



B. Panicaud, E. Rouhaud, G. Altmeyer, M. Wang, R. Kerner, A. Roos, O. Ameline (2016) Consistent hypo-elastic behavior using the four-dimensional formalism of differential geometry *Acta Mech* 227 :651–675.



G. Altmeyer, E. Rouhaud, B. Panicaud, A. Roos, R. Kerner, M. Wang (2015) Viscoelastic models with consistent hypoelasticity for fluids undergoing finite deformations, *Mech Time-Dependent Materials*, 19 (3) :375-395.



M. Wang, B. Panicaud, E. Rouhaud, R. Kerner, A. Roos (2016) Incremental constitutive models for elastoplastic materials undergoing finite deformations by using a four-dimensional formalism, *International Journal of Engineering Science* 106 :199–219.



F. Sidoroff (1982) Incremental constitutive equation for large strain elasto plasticity. *International Journal of Engineering Science*, 20 (1) :19–26.

The End